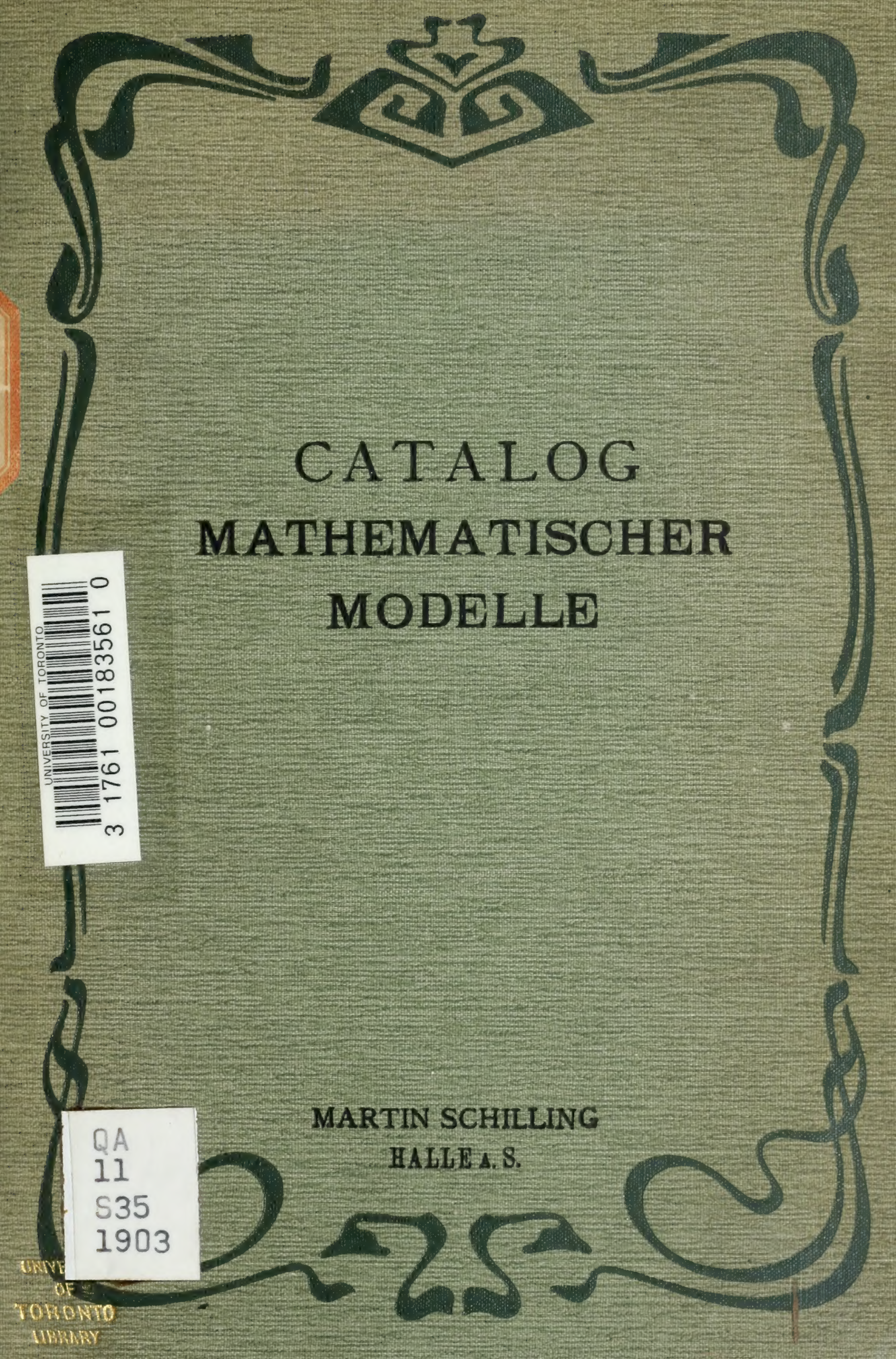


CATALOG MATHEMATISCHER MODELLE

MARTIN SCHILLING
HALLE a. S.

Catalog

mathematischer Modelle

für den höheren mathematischen Unterricht

veröffentlicht

durch die Verlagshandlung

von

Martin Schilling in Halle a. S.

Sechste Auflage.

Halle a. S.
1903.

Vorwort.

Die ersten Anfänge des Verlages, der bis zu dem im Juli 1899 erfolgten Übergange in unsern Besitz unter der Firma L. Brill in Darmstadt geführt wurde, reichen in das Jahr 1877 zurück. Sie verdanken ihr Entstehen der thätigen Anregung der Herren Professoren Brill und Klein, die zu jener Zeit an der technischen Hochschule in München wirkten und unter deren Leitung Studierende im Anschluss an die Lösung von Aufgaben aus der höheren Mathematik sich in der Herstellung von mathematischen Modellen versuchten. Auf diese Weise ergaben sich die Serien I, II, V, VIII, die Nummern 6 der Serie VI und 4, 6 und 8—14 der Serie X. Diese Modelle wie die durch sie veranschaulichten Probleme gehören inhaltlich den verschiedensten Gebieten mathematischen Denkens an. Dagegen war es möglich, die weiteren Serien, deren Herausgabe der wissenschaftlichen Mitarbeit der Herren Professoren Dyck, Finsterwalder, Kummer, Rodenberg, Rohn, Schoenflies, H. A. Schwarz, Chr. und H. Wiener und anderen zu verdanken ist, einheitlicher zu gestalten.

Wenn wir nun jetzt nach mehr als dreijährigem Bestehen des Verlages unter der neuen Firma Martin Schilling in Halle a. S. die sechste erweiterte und gegen die früheren wesentlich übersichtlicher gestaltete Auflage unseres ausführlichen Kataloges herausgeben, so hoffen wir, durch die in dieser letzten Zeit veröffentlichten neuen Serien gezeigt zu haben, wie sehr auch uns die stete gedeihliche Entwickelung des längst allgemein anerkannten eigenartigen Unternehmens am Herzen liegt. Freilich wäre dieser Erfolg nicht möglich gewesen, wenn uns nicht von Seiten der mathematischen Kreise ein aussergewöhnliches Interesse entgegengebracht wäre; wir möchten daher nicht unterlassen, auch an dieser Stelle vor allem den verehrten Autoren zu danken, die uns bei unseren auf

die Erweiterung des Verlages gerichteten Bestrebungen in selbstloser Weise unterstützt haben. Wir nennen die Herren Geheimrat Professor Dr. Hauck in Berlin, Professor Dr. H. Wiener in Darmstadt, Professor Dr. O. Wiener in Leipzig, Dr. Grassmann in Halle a. S. und Dr. Ludwig in Karlsruhe; wir gedenken im besonderen unseres wissenschaftlichen Beraters, des Herrn Professors Dr. Fr. Schilling in Göttingen, der abgesehen von der Bereicherung unserer Sammlung durch neue Modelle uns in dankenswerter Weise stets gern mit Rat und That zur Seite gestanden hat.

So ist im Laufe der verflossenen 25 Jahre eine reichhaltige Sammlung von wissenschaftlichen Anschauungsmitteln entstanden, die, dem bisherigen Erfolge entsprechend, hoffen lässt, auch fernerhin zur Belebung aller Zweige des höheren mathematischen Unterrichts an den Universitäten, technischen Hochschulen, Bergakademien und ähnlichen Bildungsanstalten an ihrem Teile wirksam beizutragen.

Der erste Teil des Katalogs führt die Modelle in der Reihenfolge ihrer Veröffentlichung auf und ermöglicht eine schnelle Orientierung über die Zeit der Entstehung und über die Urheber der einzelnen Serien und Nummern. Er giebt am besten Aufschluss über die bequemste Form des Bezuges der Modelle, über ihre Preise und deren Ermässigung bei Bestellung ganzer Serien.

Der zweite Teil enthält eine systematische Anordnung der Modelle und gewährt somit einen Überblick über das in den einzelnen mathematischen und physikalischen Wissenszweigen Gebotene. Er hebt die charakteristischen Merkmale der verwandten Modelle aus den verschiedenen Serien hervor und soll vornehmlich dem Fachmanne die Aufgabe erleichtern, die für seine speciellen Zwecke gewünschten, insbesondere die für die einzelnen Vorlesungen geeigneten Modelle aufzufinden. Dieser Teil eignet sich also vorzugsweise auch zum Studium für solche Mathematiker, die in das Verständnis der einzelnen Modellgruppen eindringen wollen.

Um beide Teile besser aufeinander beziehen zu können, ist in dem sogleich folgenden ausführlichen Inhaltsverzeichnisse bei den Serien und Nummern des ersten Teiles die Seitenzahl angegeben, wo die Modelle im zweiten Teil zu finden sind.

Durch diesen neuen Katalog werden die älteren Ausgaben ungültig.

Unser Ziel wird es sein, mit stetem Eifer auch fernerhin an der Weiterentwickelung unseres wissenschaftlichen Unternehmens zu arbeiten. Nach wie vor werden wir der Herausgabe von Modellen der reinen Mathematik, insbesondere der Theorie der Raumcurven und Flächen und der Functionentheorie, beides im weitesten Sinne genommen, unsere vornehmlichste Sorge zuwenden; sodann aber möchten wir auch der angewandten Mathematik, insbesondere der Technik, unsere Aufmerksamkeit widmen. Wir denken hier an die Disciplinen der darstellenden Geometrie, der technischen und theoretischen Mechanik einschliesslich der Kinematik und Festigkeitslehre (Elasticitätstheorie), der verschiedenen Zweige der mathematischen Physik, der Elektrotechnik sowie des Maschinenbaues überhaupt, soweit hier ein mathematischer Gedanke hervorleuchtet. Wir werden dankbar sein für jede Anregung, die uns aus dem Kreise der Fachgelehrten zu Teil wird, und Wünsche nach bestimmten Modellen, um deren Äusserung wir im Interesse der Sache ergebenst bitten, nach Möglichkeit berücksichtigen.

Und so übergeben wir denn diesen neuen Katalog, der Zeugnis davon ablegt, welche Bedeutung das mathematische Modell als belebendes und das Verständnis des Vortrages förderndes Element bei den Vorlesungen gewonnen hat, der mathematischen Welt in der zuversichtlichen Hoffnung, damit den Kreis der Gönner und Freunde unseres Unternehmens wiederum zu erweitern, und mit der ergebenen Bitte, nun auch unseren Bestrebungen durch umfangreiche Bestellungen die wünschenswerte Förderung angedeihen zu lassen.

Halle a. S., Ende 1902.

Martin Schilling
Verlagsbuchhandlung.

Vorbemerkungen.

Bei Bestellungen genügt die Angabe der Serie und Nummer, eventuell auch noch des Preises. Die Verpackung der Modelle geschieht aufs sorgfältigste, und die Emballage wird aufs billigste berechnet. Allgemein gültige Sätze lassen sich hierfür leider nicht aufstellen, die Höhe der Kosten richtet sich vielmehr danach, wie sich die einzelnen Modelle zusammenpacken lassen, ohne Schaden zu leiden. Um einen ungefähren Anhalt zu geben, sei bemerkt, dass die Verpackung beispielsweise für die vollständige Serie I (Preis Mk. 60.—) 8 Mk., für Serie II (Preis Mk. 120.—) 10 Mk. beträgt.

Besondere Wünsche, auch in Betreff der Zahlung werden gern in weitestem Masse berücksichtigt.

Inhaltsverzeichnis.

Teil I.

Anordnung der Modelle nach Serien.

Teil II.

Anordnung der Modelle nach ihrer sachlichen Zusammengehörigkeit.

Erster Teil.

Anordnung der Modelle

nach

Serien.

Erster Teil.

Ein * an der Nummer bedeutet, dass sich im II. Teil des Katalog. eine Abbildung des Modells befindet.

Carton-Modelle von Flächen zweiter Ordnung,

construiert nach Angabe
von
Dr. A. Brill,
ord. Professor an der kgl. techn. Hochschule zu München.

Dargestellt durch ineinandergefügte Ausschnitte aus farbigem Cartonpapier.

No. 1.* **Ellipsoid,** gebildet aus 22 Kreisen.
" 2. desgl. anderer Construction, gebildet aus 30 Kreisen.
" 3.* **Hyperboloid, einschaliges,** gebildet aus 34 Kreisen.
" 4. desgl., **zweischaliges,** (eine Hälfte) gebildet aus 24 Kreisen.
" 5.* **Paraboloid, elliptisches,** gebildet aus 28 Kreisen.
" 6. desgl. **hyperbolisches,** gebildet aus 26 geradlinig begrenzten Schnitten.
" 7. **Kegel,** (eine Hälfte) gebildet aus 26 Kreisen.

Die Cartonscheiben sind, unbeschadet der Beweglichkeit, gegenseitig so befestigt, dass ein Auseinanderfallen der Modelle verhütet wird. Eine wissenschaftliche Erläuterung ist beigefügt.

Preis der Serie 16 Mark.

Auf Verlangen werden die Modelle Nr. 4 und 7, damit die beiden Flächenmäntel in ihrer gegenseitigen Lage veranschaulicht werden können, in je 2 **Exemplaren** geliefert. Zum Aufstecken des Doppelkegels eignet sich dann das für das einschalige Hyperboloid bestimmte Gestell Nr. 2, während für Nr. 4 (zweischaliges Hyperboloid) zwei Gestelle Nr. 1 erforderlich sind. Die Mehrkosten betragen Mark 2.30 für jedes weitere Modell.

Diese im Jahre 1874 veröffentlichten Modelle verdanken ihr Entstehen der Anregung, die das auf der Mathematiker-Versammlung in Göttingen ausgestellte Modell eines elliptischen Paraboloids von Prof. Henrici in London, aus Halbkreisen zusammengesetzt, dem Urheber gab. Er änderte die Construction in zweckentsprechender Weise ab und dehnte das Verfahren auf die Darstellung aller Flächen zweiter Ordnung aus.

Die Modelle unterscheiden sich von anderen durch ihre Beweglichkeit, vermöge deren jedes einzelne Modell nicht nur ein einzelnes Ellipsoid, Hyperboloid etc., sondern ein ganzes System von Flächen der einen oder anderen Art darstellt, Flächenformen, welche das Modell der Reihe nach durch Anwendung eines leichten Druckes oder Zuges annimmt.

Bei der Biegsamkeit des Stoffes, aus dem die Modelle hergestellt sind, schien es geboten, zweckentsprechende Stative anfertigen zu lassen, um die Modelle beim Gebrauch zu schonen und einzelne Formteile beim Anfassen mit der Hand nicht undeutlich werden zu lassen.

	Preise
Stativ Nr. 1* zum Aufstecken der Mod. Nr. 1, 2, 4, 5 u. 7 .	Mark 1.50.
„ „ 2* zum Aufstecken des Mod. Nr. 3	„ 2.—.
„ „ 3* zum Aufstellen des Mod. Nr. 6	„ 1.—.

Bei Bestellung der Stative ohne Angabe der gewünschten Anzahl werden diese für sämtliche Modelle mitgeliefert, mithin 5 Stück von Nr. 1, je 1 Stück von Nr. 2 u. 3.

Serie I.

Gips-Modelle.

Abgüsse nach den im mathematischen Institut der kgl. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen. (1. Folge.)

Ausgeführt

unter Leitung von Professor Dr. Brill.

Nr. 1.* **Die Rotationsfläche der Tractrix mit geodätischen und Haupttangenten-Curven.** Modelliert von stud. math. *J. Bacharach.* (Grösse des Modells 25 × 18 cm.) Mark 9.—.

„ 2. **Die Brennfläche eines Strahlensystems,** welche mit der **Fläche der Krümmungscentra des elliptischen Paraboloids** in collinearer Verwandtschaft steht. Modelliert von stud. math. *L. Schleiermacher.*

a) Die beiden Mäntel der Fläche getrennt (Grösse 10 × 10 u. 7 × 7 cm.) zu je Mk. 5.—.

b) Die beiden Mäntel vereinigt (Grösse 10 × 11 cm.) Mark 5.—.

„ 3.* **Die Centrafläche des einschaligen Hyperboloids.** Modelliert von stud. math. *W. Dyck.*

a) Die beiden Mäntel der Fläche getrennt (Grösse 17×16 und 17×16 cm.) Mark 8.— und 9.—.

b) Die beiden Mäntel vereinigt (Grösse 17 × 16 cm.) Mark 10.—.

„ 4. **Die geodätischen Linien auf dem Rotationsellipsoid.** Construiert von stud. math. *K. Rohn.* (Grösse 12 × 18 cm.) Mark 6.—.

„ 5. **Die geodätischen Linien durch die Nabelpunkte des dreiaxigen Ellipsoids.** Construiert von stud. math. *K. Rohn.* (Grösse 10 × 18 cm.) Mark 6.—.

Preis der ganzen Serie 60 Mark.

Bei Gelegenheit der Uebungen, welche im mathematischen Institut der kgl. technischen Hochschule in München von den Herren Professoren Brill und Klein geleitet wurden, wurde als Zweck der auszuführenden Untersuchung wohl die Herstellung eines Modells oder einer Zeichnung ins Auge gefasst. Einige der so als Uebungsbeispiele entstandenen Modelle erwiesen sich, mit Rücksicht darauf,

dass an derartigen Anschauungsmitteln kein Überfluss ist, als der Vervielfältigung wert, und eine erste Serie derselben, welche unter Leitung von Herrn Brill enstanden ist, wurde der Öffentlichkeit übergeben. Die Modelle sind, wie sie gerade ausgeführt wurden, aneinandergereiht und erheben schon infolge ihrer Entstehungsweise nicht den Anspruch, etwas in sich Abgeschlossenes zu geben oder allen Anforderungen eines weiteren Gesichtskreises zu genügen. Immerhin dürften dieselben auch in dieser Form manches Neue und des Interesses Werte enthalten, wie denn die beigefügten Abhandlungen keineswegs nur Bekanntes reproducieren; und der Zweck, den Urheber und Verleger im Auge haben, wäre erreicht, wenn die Anregung, die von räumlichen Darstellungen auszugehen pflegt, einen Vorzug auch der vorliegenden Modelle bilden würde.

Veröffentlicht 1877.

Serie II.

Gips-Modelle.

Abgüsse nach den im mathematischen Institut der kgl. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen. (2. Folge.)

Ausgeführt

unter Leitung der Professoren Dr. Brill und Dr. Klein.

Ausgeführt unter Leitung von Professor Dr. Klein.

Nr. 1.* **Drei Modelle der Kummer'schen Fläche.** Von stud. math. *K. Rohn*.
- a) Alle sechzehn Knotenpunkte sind reell. (Grösse 21×18 cm.) Mk. 24.—.
- b) Acht Knotenpunkte reell. (Grösse 30×20 cm.) Mark 28.—.
- c) Vier Knotenpunkte reell. (Grösse 20×15 cm.) Mark 18.—.

„ 2. **Fläche dritter Ordnung mit vier reellen conischen Knotenpunkten nebst Haupttangentencurven.** Von stud. math. *J. Bacharach*. (Grösse 13×22 cm.) Mark 14.—.

Ausgeführt unter Leitung von Professor Dr. Brill.

3.* **Die Rotationsflächen constanter mittlerer Krümmung nebst geodätischen Linien.** Von stud. math. *A. v. Braunmühl*.
- a) Onduloid (Grösse 12×26 cm.) Mark 9.—.
- b) Nodoid (Grösse 11×8 cm.) Mark 8.—.
- c) Ring des Nodoids, durch Umdrehung der Schleife entstanden. Mk. 2.—.
- d) Catenoid (Grösse 16×10 cm.) Mark 8.—.

„ 4. **Rotationsfläche von constantem negativen Krümmungsmass (Kegel-Typus) nebst geodätischen und Asymptoten-Linien.** Von stud. math. *J. Bacharach*. (Grösse 17×17 cm.) Mark 9.—.

Nr. 5.* **Rotationsfläche von constantem negativen Krümmungsmass (Hyperboloid-Typus) mit parallelen geodätischen Linien und geodätischen Kreisen.** Von stud. math. *W. Dyck.* (Grösse 13×21 cm.) Mark 12.—.

„ 6. **Bahncurve eines schweren Punktes auf einer Kugel.** Von stud. math. *L. Schleiermacher.* (Grösse 18×14 cm.) Mark 11.—.

Preis der ganzen Serie 120 Mark.

Den Nummern 1—5 ist ein erläuternder Text beigefügt, bei Nr. 6 ist die erforderliche Erläuterung unmittelbar an dem Modell angebracht.

Veröffentlicht 1877.

Serie III.

Gips-Modelle von Flächen zweiter Ordnung,

ausgeführt unter Leitung von Professor Dr. **Brill**

von

R. Diesel,

Studierendem der kgl. technischen Hochschule in München.

Ganze Serie, bestehend aus 18 Modellen.

I. Gruppe, 7 Modelle (Nr. 1, 3, 5, 8, 10, 13 u. 17). — **II. Gruppe,** 11 Modelle (Nr. 2, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 15, 16 u. 18).

Nr. 1. **Ellipsoid,** grosse Halbaxe 5 cm.; Axenverhältnis $\sqrt{3}:\sqrt{2}:\sqrt{1}$. Mk. 1.40.
„ 2. Dasselbe mit Krümmungslinien. Mark 2.80.
„ 3. **Ellipsoid,** grosse Halbaxe 9 cm.; Axenverhältnis $\sqrt{3}:\sqrt{2}:\sqrt{1}$. Mk. 1.90.
„ 4.* Dasselbe mit Krümmungslinien. Mk. 6.80.
„ 5. **Einschaliges Hyperboloid mit dem Asymptoten-Kegel;** grosse Halbaxe der Kehlellipse 4 cm. (Höhe des Modells 23 cm.) Mark 8.20.
„ 6.* Dasselbe mit den beiden Scharen von geraden Erzeugenden. Mk. 13.60.
„ 7. Dasselbe mit Krümmungslinien. Mark 11.—.
„ 8. **Zweischaliges Hyperboloid** (vgl. Nr. 17), reelle Halbaxe 0,93 cm. (Höhe des Modells 23 cm.) Mark 13.60.
„ 9.* Dasselbe mit Krümmungslinien. Mark 16.40.
„ 10. **Elliptisches Paraboloid,** Halbaxen der Grundellipse 9,5 cm u. 6 cm. (Höhe des Modells 20 cm.) Mark 2.80.
„ 11. Dasselbe mit Schnitten parallel zur Grundellipse. Mark 3.80.
„ 12.* Dasselbe mit Krümmungslinien. Mark 6.80.
„ 13. **Hyperbolisches Paraboloid,** gleichseitig, Durchmesser des Begrenzungscylinders 14 cm. Mark 3.80.
„ 14. Dasselbe mit ebenen Hyperbel-Schnitten. Mark 6.80.
„ 15.* Dasselbe mit den beiden Scharen von Erzeugenden. Mark 5.60.
„ 16. Dasselbe mit Krümmungslinien. Mark 4.70.
„ 17. **Elliptischer Kegel,** Halbaxen der Grundellipse 10,4 cm. und 5,4 cm. (Höhe des Modells 11,5 cm.) Dieser Kegel ist Asymptoten-Kegel sowohl zu dem einschaligen Hyperboloid (Nr. 5), wie zu dem zweischaligen (Nr. 8). Mark 3.80.
„ 18.* Derselbe mit Krümmungslinien. Mark 5.60.

Auf sämtlichen Modellen der I. Gruppe sind die Hauptschnitte angegeben.

Preis der ganzen Serie 100 Mark,
„ „ I. Gruppe 35 „
„ „ II. „ 75 „

Die vorliegende Serie von Modellen richtet sich an den grossen Kreis derjenigen Mathematiker, die im Verlauf ihrer Lehrthätigkeit oder gelegentlich ihrer Untersuchungen das Bedürfnis einer anschaulichen Darstellung der verschiedenen Typen der Flächen zweiter Ordnung empfunden haben. So lange schon dieses Bedürfnis besteht, so wenig ist bis jetzt geschehen, demselben abzuhelfen; existierte bis dahin doch eine systematische Zusammenstellung der Flächentypen zweiter Ordnung — mit einziger Ausnahme der in diesem Verlage erschienenen Cartonmodelle — überhaupt nicht, von Modellen mit Krümmungslinien garnicht zu reden. So entschloss sich die Verlagshandlung zur Herstellung der obigen Serie, und es gelang ihr, in dem Autor derselben eine wissenschaftlich wie technisch gleich befähigte Kraft zur Ausführung ihres Unternehmens zu gewinnen. Um jedem Wunsche begegnen zu können, wurde die Serie in zwei Gruppen geteilt, von denen die erstere sämtliche Flächen zweiter Ordnung, teilweise in mehreren Typen vertreten, jedoch nur mit Angabe der Hauptschnitte umfasst, während die zweite dieselben Typen mit den beiden Scharen von Krümmungslinien, ferner einige mit Parallelschnitten und einige mit den geraden Erzeugenden enthält. Der letzten Abteilung sind zwei kleine Abhandlungen über die Herstellung der Krümmungslinien beigefügt.

Durch diese Einteilung glaubt die Verlagshandlung den Wünschen der Hochschulen ebensosehr wie denen der technischen Mittelschulen entgegenzukommen. Den Industrie- und Gewerbeschulen, Real- und Kunstschulen namentlich glaubt der Verleger die erste Gruppe der Serie empfehlen zu dürfen; auch wenn die Lehrpläne und Studienprogramme derselben nicht in das Studium der Flächen zweiter Ordnung unmittelbar einführen, sollte doch jedem zukünftigen Techniker die Gelegenheit geboten werden, sich wenigstens auf dem Wege der Anschauung eine Vorstellung davon zu erwerben, was man unter einem Paraboloid, einem Ellipsoid u. s. w. versteht. Andererseits dürften bei Vorträgen an Hochschulen die Modelle der zweiten Gruppe, welche wichtige Eigenschaften derselben zur Anschauung bringen, nicht weniger willkommen sein.

Veröffentlicht 1878.

Serie IV.

Fünf Faden-Modelle von Flächen 2. Ordnung,

dargestellt

durch Seidenfäden in Messinggestellen.

Nr. 1.* Unveränderliches **Hyperboloid.** Das Modell zeigt zwei Systeme von Flächenerzeugenden nebst Asymptotenkegel. Jedes System wird durch 64 Fäden repräsentiert. Abstand der Grundplatten 24 cm., Axenverhältnis der Kehlellipse 21 : 13 Mark 30.—

Nr. 2.* Bewegliches **Hyperboloid,** in der einen Grenzlage ein Cylinder, in der anderen ein Kegel. Das Modell ist so angeordnet, dass beide Grundplatten beliebig gegen einander gedreht und geneigt werden können. Die durch 64 Erzeugende gebildete Fläche durchläuft dabei alle Lagen des geraden oder schiefen Rotations-Hyperboloids zwischen Cylinder und geradem, bezw. schiefem Kegel und bildet bei gegen einander geneigten Grundplatten Flächen vierter Ordnung mit leicht erkennbarer Striktionslinie. Die durch 22 Erzeugende dargestellte Tangentenebene an Cylinder und Kegel durchläuft alle Lagen des das Hyperboloid längs einer Erzeugenden tangierenden hyberbolischen Paraboloids. Abstand der Grundplatten 26 cm., Höhe des ganzen Modells 55 cm. Mark 70.—

Auf Wunsch kann das Modell auch mit 2 Systemen von Erzeugenden, ähnlich wie bei Nr. 3, hergestellt werden. Preis dann Mark 75.—

Nr. 3.* Bewegliches **Hyperboloid,** in beiden Grenzlagen ein Kegel. Die Grundplatten sind beweglich wie in Nr. 2, aber es sind zwei Systeme von Fäden gespannt, welche in einer mittleren Lage die Erzeugenden eines Hyperboloids darstellen, bei einer Drehung der Grundplatten jedoch sich von einander trennen und zwei verschiedene Hyperboloide bilden, welche in der (in der Abbildung dargestellten) Grenzlage in zwei Kegel übergehen. Die durch 22 Erzeugende dargestellte Tangentenebene durchläuft wechselnde Lagen des die äussere Fläche berührenden hyperbolischen Paraboloids. Abstand der Grundplatten 22,5 cm., Durchmesser der oberen 10 cm., der unteren 20 cm., Höhe des ganzen Modells 50 cm. Mark 75.—

Nr. 4.* Unveränderliches **hyperbolisches Paraboloid.** Da die Fläche eine allseitig offene ist, so wurde die Vorstellung des Flächenhaften durch Anordnung besonders dicht gespannter Fäden zu erhöhen gesucht. Die Tangentialebene im Scheitel enthält zwei Erzeugende der Fläche, welche normal zu einander stehen. Eine dieser Ebene parallele bildet die Grundplatte des Modells; der Abstand der beiden anderen dazu senkrechten Begrenzungsebenen beträgt 17 cm. Mark 44.

Nr. 5.[1] Bewegliches **hyperbolisches Paraboloid.** Die Fläche ist in ein gleichseitiges windschiefes Viereck einbeschrieben, dessen Seiten paarweise fest verbunden sind. Durch Drehung um eine horizontale Axe (Diagonale des Vierseits) lassen sich diese Seitenpaare aus der horizontalen in eine vertikale Grenzlage drehen, wobei die aus 2 sich kreuzenden Systemen von je 42 Erzeugenden gebildete Fläche aus einer horizontalen Ebene in eine vertikale Doppelebene übergeht. Durch Klemmschrauben ist die Fläche in jeder Lage leicht festzustellen. Seite des Vierecks 32 cm. Mark 70.—

Diese Serie dient den Darstellungsarten der Cartonmodell-Serie und der Serie 3 der Gipsmodelle von Flächen zweiter Ordnung als wesentliche Ergänzung.

Preis der ganzen Serie 270 Mark.

Die Messinggestelle sind schwarz gebeizt, und bei sämtlichen Modellen sind die Verbindungen der Messingteile mit aller Sorgfalt einfach und dauerhaft hergestellt.

Veröffentlicht 1879.

Serie V.

Gips-Modelle.

Abgüsse nach den im mathematischen Institut der kgl. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen. (3. Folge.)

Ausgeführt

unter Leitung von Professor Dr. Brill.

Nr. 1.* **Darstellung der elliptischen Funktion $\varphi = am\,(u, k)$ durch eine Fläche.** Von den stud. math. *Th. Kuen* und *Chr. Wolff.* (Grösse 19×25×35 cm.) Mark 18.—.

„ 2. **Rotationsflächen von constantem positiven Krümmungsmass mit geodätischen Linien (drei Typen mit gleichem Krümmungsmass).** Nach den Zeichnungen von *E. Bour* (Journal de l'Ecole Polyt., Tome 22) modelliert und mit geodätischen Linien versehen von Assistenten Dr. *P. Vogel.*

*a) Die Kugel. (Grösse 9 cm.) Mark 1.—.

b) Die Meridiancurve der Umdrehungsfläche trifft die Axe. (Grösse 11×7 cm.) Mark 4.—.

c) Die Meridiancurve der Umdrehungsfläche trifft die Axe nicht. (Grösse 10×12 cm.) Mark 9.—.

„ 3. **Schraubenfläche von constantem positiven Krümmungsmass.** (Letzteres ist das der Flächen unter Nr. 2). Von stud. math. *Th. Kuen.* (Grösse 24×15 cm.) Mark 13.—.

„ 4.* **Schraubenfläche von constantem negativen Krümmungsmass.** (Meridiancurve ist die Tractrix. Vgl. U. Dini, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris 1865, 1. Sem. S. 340). Von Dr. *P. Vogel.* (Grösse 24×15 cm.) Mk. 15.50.

„ 5.* **Vier Formen der Dupin'schen Cyclide** (vgl. die Abhandlung von Clerk Maxwell in Quart. Journ. of Math. Bd. 9, S. 111) von Dr. *P. Vogel.*

a) Ringcyclide mit imaginären Knotenpunkten. (Grösse 7×14 cm.) Mark 9.—.

b) Horncyclide; zwei reelle Knotenpunkte vereinigen zwei auseinander liegende Flächenmäntel. (Grösse 6×19 cm.) Mark 11.50.

c) Spindelcyclide; zwei reelle Knotenpunkte vereinigen zwei ineinander liegende Flächenmäntel. (Grösse 10×11 cm.) Mark 6.50.

d) Parabolische Cyclide mit zwei reellen Knotenpunkten; erstreckt sich mit einem unpaaren Flächenmantel ins Unendliche. (Grösse 12×15 cm.) Mark 11.50.

Nr. 6. **Die Kettenlinie auf der Kugel.** (Vgl. die Abhandlung von Clebsch in Crelle's Journ. Bd. 57, S. 104.) (Grösse 9 cm.) Mark 8.—.

Die beiden (auf einer Kugel vereinigten) Typen entsprechen dem Fall, wo das elliptische Integral sich auf ein Kreisintegral reduciert. In den Bezeichnungen der genannten Abhandlungen: $\varrho \sin \varepsilon = 1$, a) $\varrho = {}^{3}/_{4}$, b) $\varrho = {}^{5}/_{4}$.

„ 7. **Die Enveloppen der von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien auf dem Rotationsellipsoid.** Von Dr. *A. v. Braunmühl.* (Vgl. dessen Abhandlung in den Math. Annalen Bd. 14, S. 557.)

a) Das verlängerte Rotationsellipsoid (ein Ausgangspunkt) (Grösse 12×8 cm.) Mark 6.50.

b) Das Sphäroid, mit den Enveloppen für zwei verschiedene Ausgangspunkte. (Grösse 7×10 cm.) Mark 6.50.

Preis der ganzen Serie 100 Mk.

Den Nummern 1, 3, 4 und 7 sind Abhandlungen beigefügt, in welchen der Gang der Rechnung kurz dargelegt wird.

Veröffentlicht 1880.

Serie VI.

Modelle von Wellenflächen und eines Kreiskegels, sowie Gipsmodelle,

nach Originalen der techn. Hochschule München (4. Folge).

Nr. 1.* **Die Wellenfläche für optisch zweiaxige Krystalle.** Verhältnis der Axenlängen 12 : 8,3 : 6,1. (Grösse 12×8 cm.) Mark 9.—.

a) Der äussere Mantel (längs eines Hauptschnittes zerlegbar) mit Ausschnitten, die den inneren Mantel zeigen.

b) Der innere Mantel.

„ 2. **Das zugehörige Ellipsoid** mit den gleichen Axen. Mark 4.—.

„ 3. **Die Wellenfläche für optisch einaxige Krystalle** mit negativer Doppelbrechung. Ein Ausschnitt des Sphäroids zeigt die Kugel. Das Axenverhältnis 8,8 : 7,8 ist ungefähr das des Kalkspaths. (Grösse 8×9 cm.) Mark 4.—.

(Wellenfläche für optisch einaxige Krystalle mit positiver Doppelbrechung s. Nr. 7).

„ 4. **Die Wellenfläche für optisch zweiaxige Krystalle in einzelnen Octanten mit den sphärischen und ellipsoidischen Linien auf beiden Mänteln und 8 Nabelpunkten.** Verhältnis der Axenlänge 12 : 9 : 6. (Grösse der halben Fläche, 2 Octanten, 24×9 cm.) Mark 8.50.

„ 5. Ein **Kreiskegel** mit Ellipsen-, Hyperbel- und Parabel-Schnitt. Die einzelnen Stücke sind beweglich. (Grösse 32×19 cm.) Mark 22.—.

„ 6. **Die Raumcurven dritter Ordnung auf Cylindern zweiter Ordnung** dargestellt von stud. math. *E. Lange*. Gipsabgüsse nach den unter Leitung von Professor Dr. *Klein* im mathematischen Institut der kgl. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen. (Grösse 10,5×6,5 cm.) Mark 18.—.

a) Die cubische Ellipse. b) Die cubische Hyperbel. c) Die cubische Parabel. d) Die cubische hyperbolische Parabel.

Preis der ganzen Serie 60 Mark.

Der Nr. 4 ist eine Abhandlung von Herrn Rector Dr. Böklen in Reutlingen beigefügt, der Nr. 6 eine solche des Verfertigers.

Die Nummern 1, 2, 3 und 5 sind auf Veranlassung von Prof. Dr. Brill entstanden.

Veröffentlicht 1880.

Serie VII.

Gips-Modelle von Flächen dritter Ordnung.

Die verschiedenen Gestalten der Flächen dritter Ordnung mit parabolischen Curven und die wichtigsten ihrer Hesse'schen Flächen

von

Dr. Carl Rodenberg,

Professor der Mathematik an der Gr. technischen Hochschule zu Darmstadt.

Ganze Serie, bestehend aus 27 Modellen.

I. Gruppe Mod. Nr. 1–15. **II. Gruppe** Mod. Nr. 16–26.

Nr. 1.* Diagonalfläche mit 27 reellen Geraden.

„ 2–6. Flächen mit 4 reellen (C_2^4), welche unter sich collinear sind und nur im Verhalten zur unendlich fernen Ebene Unterschiede zeigen.

„ 7. Fläche mit 3 reellen C_2, zu denen kein vierter treten kann.

„ 8. Dieselbe Art, von der anderen Flächenseite betrachtet, zur Bildung des C_6 (Modell 16).

„ 9. Fläche mit 3 reellen B_3.

„ 10. Fläche mit B_3, dessen Ebenen in je drei reellen Knotenstrahlen schneiden. Das Modell dient gleichzeitig zur Überführung des B_3 in einen C_6.

„ 11. Fläche mit B_3, dessen Ebenen conjugiert imaginär sind.

„ 12 u. 13. Fläche mit $B_4 + 2 \left\{ \begin{matrix} \text{reellen} \\ \text{imaginären} \end{matrix} \right\} C_2$. Bei 12 sind die Ebenen des B_4 reell, bei 13 imaginär.

„ 14. Fläche mit $B_5 + C_2$.

„ 15. Fläche mit $B_6 + C_2$.

„ 16 u. 17. Fläche mit C_6, dessen Ebene in $\left\{ \begin{matrix} \text{drei} \\ \text{einem} \end{matrix} \right\}$ reellen $\left\{ \begin{matrix} \text{Strahlen} \\ \text{Strahl} \end{matrix} \right\}$ schneidet.

„ 18. Fläche mit C_7.

„ 19. Fläche mit U_8.

„ 20. Regelfläche, deren Doppelgerade völlig von reellen Flächenteilen umgeben ist.

„ 21. Regelfläche, bei deren Doppelgerade dies nur für eine endliche, von zwei Cuspidalpunkten begrenzte Strecke der Fall ist.

*) Die Buchstaben C, B, U bedeuten einen conischen, einen biplanaren, einen uniplanaren Knoten, der angehängte Zeiger gibt die Anzahl der Einheiten an, um welche die Klasse durch die betreffende Singularität erniedrigt wird. — Vergl. übrigens die Ausführungen im 2. Teil.

Nr. 22 u. 23. Cayley'sche Regelfläche mit { unendlich fernem / im Endlichen gelegenen } Cuspidalpunkte.
„ 24 a.* Hesse'sche Fläche zu 2 und 5.
„ 24 b. Sternförmiger Teil der vorhergehenden für ein Pentaeder, das aus der unendlich fernen Ebene und einem regulären Tetraeder besteht.
„ 25.* Hesse'sche **Fläche zu** 7.
„ 26. (Drahtmodell) Abbildung der Flächen mit 1, 2, 3, 4 C_2, welche einem reellen Pentaeder angehören, auf den Punktraum.

Preis der ganzen Serie 300 Mark.

I. Gruppe 140 Mark. II. Gruppe 160 Mark.

Die wenigen bis jetzt publicierten Modelle von Flächen dritter Ordnung stehen, wenn man von den einfachsten Arten, den Regelflächen, absieht, in keinem organischen Zusammenhange mit einander und weisen nur die niedrigsten Singularitäten auf. Durch die vorliegende Serie wird nun eine **Darstellung sämtlicher charakteristischen Typen von Flächen dritter Ordnung,** namentlich auch der mit höheren Singularitäten begabten beabsichtigt, mit deren Hülfe man sich ein vollständiges und abgeschlossenes Bild aller möglichen Formen von Flächen dritter Ordnung, die für eine Gesamtdarstellung zu zahlreich wären, verschaffen kann, indem man jeden beliebigen Typus aus einem der gegebenen (und ebenso irgend zwei der vorliegenden aus einander) durch continuierliche Deformation auf anschauliche Weise und ohne jede Schwierigkeit ableiten kann. Dieselbe Aufgabe ist zugleich für diejenigen Hesse'schen Flächen gelöst, welche einem eigentlichen reellen Pentaeder angehören. Von der nicht mehr schwierigen Behandlung der übrigen Arten dieser Fläche, welche den verschiedentlich degenerierten Pentaedern zukommen, wie sie der Verfasser im Bd. 14 der Math. Annalen aufgezählt hat, konnte füglich abgesehen werden.

Für die wirkliche Darstellung erwiesen sich besonders diejenigen Typen geeignet, die neben der gegebenen höheren Singularität noch so viel wie möglich conische Knoten zeigen, und wurden daher diese Flächen modelliert. Die übrigen mit weniger und keinem conischen Knoten mag man sich dann durch Anwendung der beiden Processe des „Verbindens“ und „Trennens“ wie sie Herr Prof. *Klein* in seiner Arbeit, Math. Annalen Bd. VI., benutzt, und welche an Einfachheit nichts zu wünschen übrig lassen, ableiten. Dies gilt

auch namentlich für Flächen mit nur conischen Knoten oder ohne Singularitäten, welche imaginäre Linien haben.

Unterschiede in der Gestalt, welche in verschiedenem Verhalten einer und derselben Art zur unendlich fernen Ebene ihren Grund haben, sind nur an einer Gruppe, den Flächen mit $4C_2$, klar gelegt, welche sich hierzu besonders eignen. Alle übrigen — mit Ausnahme der Regelflächen — werden von der unendlich fernen Ebene in einem unpaaren Curvenzuge getroffen, da sich gerade bei dieser Annahme die Bildung höherer Singularitäten aus niederen, insbesondere aus C_2, sehr anschaulich macht, indem nur endliche Deformationen notwendig werden. Hat man an letzteren Modellen dann einmal das Verhalten der Fläche in der Nähe der Singularität und deren Entstehung kennen gelernt, so gibt ein Blick auf diejenigen mit $4C_2$ eine Vorstellung von den ihnen collinearen Gestalten.

Da ein conischer Knoten in einem gegebenen Punkt bei festem eigentlichen Pentaeder die Fläche vollständig bestimmt, so kann er als Bild derselben gedacht werden. Mit Hülfe des Modells Nr. 26 kann man dann ohne Weiteres die Art der zugehörigen Fläche angeben und eine Vorstellung von ihrem ungefähren Verlaufe gewinnen.

Den Modellen ist eine 2 Bogen in gr. 8⁰ umfassende Abhandlung beigefügt.

Veröffentlicht 1881.

Serie VIII.

Gips-Modelle.

Abgüsse nach den im mathematischen Institut der kgl. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen. (5. Folge.)

Ausgeführt

unter Leitung von Professor Dr. Brill.

Nr. 1.* **Fläche von constantem negativen Krümmungsmass mit ebenen Krümmungslinien** (nach *L. Bianchi*, vergl. Mathematische Annalen Bd. 16, sowie *A. Enneper*, Göttinger Nachrichten 1868). Von stud. math. *J. Mack.* (Grösse 24×18 cm.) Mark 16.—.

„ 2. **Minimalfläche neunter Ordnung** (nach *Enneper*, vgl. Göttinger Nachrichten 1871, S. 28). Von cand. math. *G. Herting.* (Grösse 26×34 cm.) Mark 21.—.

„ 3. **Fläche zwölfter Ordnung, Brennfläche** der von einer leuchtenden Linie ausgehenden Strahlen nach ihrer Reflexion an einem Cylinder, dessen Axe die Linie trifft. Von stud. math. *S. Finsterwalder.* (Grösse 13×20×12 cm.) Mark 15.—.

„ 4.* **Reliefperspectivische Darstellung** eines Würfels, einer Kugel, eines Kegels und eines Hohlcylinders, auf einem Untersatz vereinigt. Von stud. math *H. Thoma.* (Grösse 20×45×5 cm.) Mark 23.—.

„ 5. **Röhren-Schraubenfläche** nebst Krümmungslinien. Von Assistenten *Th. Kuen.* (Grösse 20×30 cm.) Mark 13.—.

„ 6.a*. **Windschiefe Schraubenfläche** nebst Krümmungslinien und Asymptotencurven. Von cand. math. *G. Herting.* (Grösse 23×22 cm.) Mark 17.—.

Um die Abwicklung dieser Fläche auf ein Catenoid zu zeigen:

b*. **Catenoid** (Umdrehungsfläche der Kettenlinie) aus biegsamem Messingblech. Der Kehlkreis der Rotationsfläche geht bei der Deformation in die Axe der Schraubenfläche über; s. Teil II. Mark 2.—.

c. **Dasselbe** in Gips, nebst Krümmungslinien und Asymptotencurven. (Grösse 10×22 cm.) Mark 10.50.

Das Catenoid aus Messingblech wird in die windschiefe Schraubenfläche in der Weise übergeführt, dass man die Endpunkte des Kehlkreises fasst und diesen in eine gerade Linie auszieht, indem man gleichzeitig ein wenig dreht.

No. 7 a. **Auf das Rotationsellipsoid abwickelbare Schraubenfläche** nach *E. Bour*, Journal de l'Ecole polytechnique Bd. XXII). (Grösse 25 × 12 cm. Mk. 10.50

b. **Rotationsellipsoid** aus biegsamem Messingblech. Mark 2.50.

c. **Dasselbe** in Gips. (Grösse 3×9 cm.) Mark 1.50.

Preis der ganzen Serie 125 Mark.

Der Nr. 1 ist eine Abhandlung von Assistenten *Ch. Huen*, den Nummern 2, 3, 5 sind Abhandlungen der Verfertiger beigefügt. Die Erläuterung zu Nr. 4 ist auf dem Modell selbst angebracht.

Veröffentlicht 1882.

Serie IX.

Gips-Modelle von Flächen vierter Ordnung

nach Professor Dr. Kummer in Berlin.

Abguss nach den im Besitze des mathematischen Seminars der kgl. Universität zu Berlin befindlichen Originalen, von Professor Dr. Kummer besprochen in den Monatsberichten der kgl. Academie der Wissenschaften zu Berlin von 1862, 1866, 1872.

Nr. 1—6. Sechs Typen von Flächen vierter Ordnung mit vier längs Kreisen berührenden Ebenen.

Die Kreise sind die Durchschnittskreise einer Kugel mit den Seitenflächen eines [illegible] Tetraeders.

Nr. 1. Die Fläche besteht aus vier congruenten Teilen, die in sechs biplanaren Knotenpunkten zusammenhängen. Mark 17.—

„ 2. Wie in Nr. 1, die Tangentialebenen in den Knotenpunkten sind jedoch imaginär. Mark 19.—

„ 3. Die Römische Fläche von Steiner mit Haupttangentenkurven. Sie besitzt drei Doppelgerade, die sich in einem Punkte treffen. Mark 10.—.

„ 4. Die Fläche besteht aus zehn (sechs und vier je unter sich congruenten) Teilen, die in zwölf conischen Knotenpunkten zusammenhängen. Mark [illegible].—

„ 5. Die Fläche besteht aus sechs congruenten Teilen, die in vier uniplanaren Knotenpunkten zusammenhängen. Mark 21.—.

„ 6. Die Fläche besteht aus vier congruenten Teilen, die in vier uniplanaren Knotenpunkten zusammenhängen. Mark 21.—.

„ 7, 8. Zwei Modelle der Dupin'schen Cyclide mit den [illegible] doppelt berührenden Ebenen. Zusammen Mark 12.—

„ 9. Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden, [illegible] Krümmungskreise der Normalschnitte einer [illegible] Fläche in einem positiv gekrümmten Flächenelement. Mark 6.—. (Vergl. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, 2. Teil, 3. Aufl., Cap. VI, § 308).

Preis der ganzen Serie 120 Mark.

Die Verlagshandlung hat von Herrn Professor Dr. *Kummer* in Berlin die Erlaubnis zur Entnahme von Abgüssen der von ihm angefertigten und dem math. Seminar der kgl. Universität zu Berlin überlassenen Modelle erhalten. Diese Förderung ihrer Absichten von berufenster Seite erfüllt sie mit Genugthuung und verpflichtet sie zu um so lebhafterem Dank, als diese bisher unveröffentlichten Modelle des berühmten Geometers zu den schönsten und elegantesten gehören, die bisher entstanden sind. Mit gütiger Einwilligung des Herrn Professors Dr. *Weierstrass* in Berlin wurden die Copien unmittelbar von den Originalen entnommen.

Den Modellen 1—6 liegt ein Abdruck der in den Monatsberichten der Berliner Academie von 1863, 1866 und 1872 erschienenen Besprechungen der Modelle von Professor Dr. Kummer bei.

Veröffentlicht 1883.

Serie X.

Gips-, Draht- und Messingblech-Modelle,

zum grossten Teil nach Originalen der techn. Hochschule München (6. Folge).

Nr. 1.* **Zehn Drahtgestelle zur Darstellung von Minimalflächen** mittelst Seifenlosung. Preis 12 Mark.

a. Zwei Ringe mit Griff und Füssen zur Darstellung der Rotationsflächen constanter mittlerer Krummung (Plateau, Statique des liquides, T. 1 p. 93–103).

b. Schraubenlinie zur Darstellung der windschiefen Schraubenfläche (ibd. p. 216).

c—g. Kanten des Oktaeders, der vierseitigen Pyramide, des dreiseitigen Prismas, des Tetraeders und Würfels (vgl. Schwarz, Bestimmung einer speciellen Minimalfläche 1871, pag. 84).

h. Kanten des sechsseitigen Prismas (ibd. p. 93).

i. Drahtgestell zur Darstellung der ersten der fünf von Scherck (Crelle's Journal, XIII. p. 185) angegebenen Minimalflächen.

k. Zwei rechtwinklig gekreuzte Rechtecke zur Darstellung der fünften Scherck'schen Minimalfläche.

(Nebst einer Anweisung zur Herstellung der Seifenlösung.)

„ 2. **Zwei Modelle für Fadenconstructionen des Ellipsoids,** von Dr. *O. Staude.* Mit zwei Abhandlungen. Preis zusammen Mark 12.—.

a. Construction aus den beiden Focalcurven.

b. Construction aus einem confocalen Ellipsoid und Hyperboloid.

„ 3. **Dreiaxiges Ellipsoid** in Gips, längs eines Kreisschnittes in zwei Teile zerlegbar. Mark 4.—.

„ 4.* **Modell einer Fläche vierter Ordnung** mit zwei sich schneidenden Doppelgeraden. Von stud. math. *S. Finsterwalder.* (Grösse 10 cm.) Mark 3,50.

„ 5. **Parabolische Cyclide** mit vier imaginären Knotenpunkten. Modelliert von stud. math. *S. Finsterwalder.* Mit einer Abhandlung. (Grösse 12×20 cm.) Mark 10.—. (Nachtrag zu den Dupin'schen Cycliden Serie V, Nr. 5.)

„ 6. **Zwei Flächenstreifen von constantem positiven Krümmungsmass** aus dünnem Messingblech. Preis zusammen Mark 4.50. (Nachtrag zu Serie V, Nr. 2.)

„ 7. **Wellenfläche für optisch einaxige Krystalle** mit positiver Doppelbrechung, deren Axenverhältnisse ungefähr dem Zinnober entsprechen. (Grösse 9 cm.) Mark 4.—. (Nachtrag zu Serie VI, Nr. 3.)

Nr. 8. **Drei Typen von Cycliden,** für welche die Krümmunglinien Kreise und sphärische Curven vierter Ordnung sind. Von *S. Finsterwalder.* Preis zusammen Mark 12.—.

Nebst einer Abhandlung von *S. Finsterwalder.*

„ 9. **Fläche achter Ordnung,** die durch Bewegung einer Kreislinie entsteht, deren Ebene senkrecht zur Ebene zweier sich senkrecht schneidenden Geraden bleibt während die Endpunkte eines Durchmessers auf diesen Geraden gleiten; oder durch Bewegung des Randes einer Kreisscheibe, welche gegen eine verticale und eine horizontale Wand gelehnt aus der verticalen in die horizontale Lage gleitet. Von *S. Finsterwalder.* Mark 4.—.

„ 10. **Zwölf Typen von Rotationsflächen mit aufgezeichneten Asymptoten- (Haupttangenten-) Curven.** Von *G. Herting.* Preis zusammen Mark 80.—.

Es befindet sich darunter die Fläche, die durch Umdrehung der Sinuslinie um eine Axe senkrecht zur Wellenrichtung entstanden ist (diese Eine modelliert von *H. Sievert*), ferner solche, für welche die Projection der Asymptotencurven auf eine Ebene senkrecht zur Umdrehungsaxe ein System von Kreisen, von logarithmischen und anderen Spiralen, von Pascal'schen Schneckenlinien u. s. w. ist.

Nebst einer Abhandlung von *G. Herting.*

„ 11. **Zwei bohnenförmig gestaltete Körper zur versuchsweisen Bestimmung der parabolischen Curve, der Krümmungs- und Asymptotenlinien** u. s. w. Preis zusammen Mark 3.—.

„ 12. **Enveloppen der von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien.** Von Dr. *A. v. Braunmühl.* Preis zusammen Mark 14.—.

a) Auf einem dreiaxigen Ellipsoid.

b) Auf einem grossen abgeplatteten Rotationsellipsoid (zur Demonstration mit gespanntem Faden, der an einem Stift im Ausgangspunkt befestigt ist, geeignet).

c) Auf einem grossen verlängerten Rotationsellipsoid (desgleichen)

„ 13. **Dreiaxiges Ellipsoid** mit dem Axenverhältnis 1 : 2 : 3. Mark 1.20.

„ 14. **Zwei Flächenstreifen von constantem negativen Krümmungsmass** aus biegsamem Messingblech, mit deren Hilfe das Aufbiegen einer solchen Fläche auf eine andere und deren Verschieblichkeit in sich, überhaupt der Begriff einer „Geometrie“ auf diesen Flächen erläutert werden kann. Das Krümmungsmass ist dasjenige des Modells Serie II, Nr. 5. Mark 4.—.

Preis der ganzen Serie 155 Mark.

Bis auf No. 2, a und b sind diese Modelle samtlich nach Originalen der technischen Hochschule in München hergestellt.

Veröffentlicht 1885.

Serie XI.

Acht Draht-Modelle*

über die Abhängigkeit der Rückkehrelemente der Projectionen einer unebenen Curve von denen der Curve selbst.

Von

Geh. Hofrat Dr. **Chr. Wiener**,

Professor an der Grossh. techn. Hochschule zu Karlsruhe.

Wenn sich auf einer unebenen Curve ein Punkt und mit ihm die Tangente und die Schmiegungsebene der Curve hinbewegt, so kann an einer Stelle jedes dieser Elemente seinen Bewegungssinn beibehalten oder ihn umkehren. Dieses Verhalten wird der Charakter der Curve und ein umkehrendes Element ein Rückkehrelement genannt. Durch Verbindung der verschiedenen Charaktere treten acht Möglichkeiten ein. — Die Projection der Curve auf eine Ebene zeigt im allgemeinen für den Punkt und die Tangente dieselben Charaktere wie die unebene Curve selbst. Nur bei den Projectionen auf die drei Hauptebenen, die Schmiegungs-, die Normal- und die rectificierende Ebene, zeigen sich Änderungen der Charaktere, so dass hier Spitzen und Wendepunkte in der Projection auftreten können, die an der Curve nicht vorhanden sind, und solche verschwinden, die sich an der Curve befinden.

Die Modelle zeigen die acht möglichen Fälle. Sie stellen die Curven aus Draht und die Projectionen auf die drei Hauptebenen durch Zeichnung dar und lassen durch Visieren oder Schattenwerfen die Abhängigkeit ihrer Charaktere, und durch allmähliche Änderung der Projectionsrichtung die Entstehung der Singularitäten der Projectionen erkennen.

Preis der ganzen Serie 45 Mark.

Veröffentlicht 1884.

Serie XII.

Vier Faden-Modelle

zu der Raumcurve vierter Ordnung erster Art und ihrer abwickelbaren Fläche.

Von

Professor Dr. **H. Wiener**

in Darmstadt.

Nr. 1.* **Erster Fall.** Die Curve liegt auf vier reellen Kegeln. Darstellung der Curve als Schnitt dieser Kegel. Mark 110.—.

„ 2. „ „ Die abwickelbare Fläche der Tangenten der Curve. Mk. 110.—.

„ 3.* **Zweiter Fall.** Die Curve liegt auf zwei reellen und zwei imaginären Kegeln. Darstellung als Schnitt jener beiden. Die abwickelbare Fläche ihrer Tangenten. Mark 110.—.

„ 4. **Dritter Fall.** Die Curve liegt auf vier imaginären Kegeln. Darstellung als Schnitt zweier geradliniger Hyperboloide. Die abwickelbare Fläche der Tangenten. Mark 70.—.

Preis der ganzen Serie 380 Mk.

Die vorliegenden Modelle sollen die Haupteigenschaften derjenigen Raumcurven vierter Ordnung, die der Schnitt der Flächen zweiter Ordnung eines Büschels sind, sowie der abwickelbaren Fläche ihrer Tangenten und der Doppelcurve dieser Fläche zur Anschauung bringen. Und zwar ist dies für die drei wesentlich verschiedenen Formen der als reell vorausgesetzten Raumcurve durchgeführt, welche von der Reellität der vier im Flächenbüschel enthaltenen Kegel abhängen*). Je nachdem von diesen nämlich vier oder zwei oder keine reell sind, besitzt ihre Schnittcurve zwei paare Äste, einen einzigen Ast oder zwei unpaare Äste.

*) Man vergleiche v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, Art. 558, 560 u. 561.

Modell 1 zeigt die Curve, welche der Durchschnitt von vier reellen Kegeln ist. Von jedem derselben ist eine Anzahl von Erzeugenden durch Fäden dargestellt. Es laufen dann immer vier Fäden durch einen Curvenpunkt und halten eine Perle, deren Gesamtheit die Curve veranschaulicht.

Modell 2 bildet eine Ergänzung des ersten, indem es dieselbe Curve wie jenes vorführt, diesmal aber eingehüllt durch ihre vermittelst Fäden dargestellten Tangenten. In den Ebenen je dreier Kegelspitzen treffen sich die Tangenten paarweise und bilden so die aus vier rationalen ebenen Curven vierter Ordnung zusammengesetzte Doppelcurve der abwickelbaren Fläche. Jede dieser vier Curven besitzt in drei Kegelspitzen Doppelpunkte, von denen je einer isoliert ist. Die Punkte der Doppelcurve sind da, wo sich zwei Fäden treffen, wieder durch Perlen bezeichnet. Da sie aber auch isolierte Teile enthält, in denen sie die Fläche verlässt, so zeigen Drähte ihren vollständigen Verlauf an. Die Zwickpunkte der Doppelcurve, in denen die isolierten Teile auf die Fläche stossen, sind die Schnittpunkte der vier Ebenen, in denen sie liegt, mit der Raumcurve.

Diese Punkte sind auch bezüglich der Raumcurve als singuläre Punkte ausgezeichnet. Sie besitzen nämlich Rückkehrschmiegungsebenen (diese Singularität ist im zweiten Modell der Serie XI. dargestellt). Es ist dadurch zugleich der allgemeine Satz veranschaulicht, dass in einem derart singulären Punkt einer beliebigen Raumcurve die abwickelbare Fläche diese verlässt und weiterhin isoliert verläuft.

Modell 3, welches die Curve darstellt, durch die nur zwei reelle Kegel gehen, vereinigt für diesen Fall, was für den ersten in zwei Modelle getrennt ist.

Modell 4 stellt die Raumcurve vierter Ordnung dar, durch welche kein reeller Kegel geht. Da die Curve die Eigentümlichkeit hat, dass sie nur auf geradlinigen Flächen zweiter Ordnung liegt, so war es möglich, sie durch zwei Hyperboloide herzustellen, von welchen je eine Schar von Erzeugenden durch eine Anzahl von Fäden veranschaulicht ist. Die vier imaginären Kegelspitzen liegen paarweise auf zwei reellen Geraden und diese sind einander conjugiert in Bezug auf jedes der beiden Hyperboloide, d. h. sie sind Gegenkanten von zwei Tetraedern, deren übrige Kanten durch Erzeugende je einer der Fläche gebildet sind. Diese Erzeugenden sind durch

besondere Fäden, jene Gegenkanten durch Drähte hervorgehoben. Jeder von diesen schneidet die beiden Hyperboloide in sich trennenden Punktepaaren, den Eckpunkten der Tetraeder. Die Involution, der diese Punktepaare angehören, hat die imaginären Kegelspitzen zu Doppelpunkten.

Die abwickelbare Fläche ist auch hier angegeben, sie zerfällt, wie die Curve selbst, in zwei Teile, die in diesem Falle vollständig getrennt sind, indem ihre Doppelcurve durchweg imaginär ist.

Es stellen die ersten beiden Modelle die Gebilde in der grössten auftretenden Vollständigkeit dar; in dem einfacheren Falle konnten sie in einem einzigen Modelle, dem dritten, vereinigt werden; das vierte Modell zeigt von den anderen völlig verschiedene, besonders interessante Formen.

Zum Schluss mag noch auf die verschiedenen Formen hingewiesen werden, welche die Projectionen der Raumcurve auf eine Ebene annehmen. Es sind Curven mit zwei Doppelpunkten, und sie erschöpfen sämtliche Formen, die eine solche Curve aufweisen kann. Auch hier tritt, wie bei den Raumcurven, der Unterschied derer mit zwei paaren Ästen, einem einzigen Ast, oder zwei unpaaren Ästen auf. Aber in jeder dieser Abteilung treten noch sehr verschiedenartige Formen auf, welche erkannt werden, wenn man das Auge in die verschiedenen Teile des Raumes bringt, die durch die Kegel und die abwickelbare Fläche begrenzt werden. So sind allein bei der Curve des ersten Falles 18 verschiedene Formen der Projection zu unterscheiden, während im zweiten und dritten Falle 11 und 3 verschiedene Formen auftreten.

Die Anregung zur Anfertigung dieser Modelle hat der Verfasser durch seinen Vater erhalten, indem er schon in seiner Studienzeit an der technischen Hochschule zu Karlsruhe ein zu dieser Gruppe gehöriges Modell für die Unterrichtssammlung für darstellende Geometrie ausführte.

Veröffentlicht 1884.

Serie XIII.

Zehn Faden-Modelle der Regelflächen 4. Ordnung

von

Dr. Karl Rohn.

Professor der Mathematik an der königl. technischen Hochschule zu Dresden.

Nr. 1. **Regelfläche mit zwei reellen Doppelgeraden und vier Pinchpoints auf jeder derselben.** Sie besteht aus zwei Teilen, auf welchen je ein Stück von jeder Doppelgeraden liegt. Mark 36.—.

„ 2*. **Regelfläche mit zwei reellen Doppelgeraden ohne Pinchpoints.** Die beiden Mäntel der Fläche durchsetzen sich gegenseitig längs der beiden Doppelgeraden. Mark 44.—.

„ 3. **Regelfläche mit zwei reellen Doppelgeraden und vier Pinchpoints auf einer derselben.** Die beiden Mäntel dieser Fläche enthalten je ein Stück der einen Doppelgeraden und durchschneiden sich gegenseitig längs der andern. Mark 40.—.

„ 4. **Regelfläche mit zwei conjugiert imaginären Doppelgeraden;** sie besteht aus zwei hyperboloidartigen Flächenteilen. Mark 36.—.

„ 5. **Regelfläche mit einer Selbstberührungsgeraden und vier Pinchpoints auf derselben.** Diese Fläche besitzt zwei gleichartige Teile und geht aus der Fläche 1 durch Zusammenrücken der beiden Doppelgeraden hervor. Mark 36.—.

„ 6. **Regelfläche mit einer dreifachen Geraden und vier Pinchpoints auf derselben;** diese Fläche besitzt noch eine einfache Leitgerade. Mark 40.—.

„ 7. **Regelfläche mit einer dreifachen Geraden und zwei constanten Tangentialebenen längs derselben;** d. h. die Erzeugende, welche die Fläche beschreibt, geht zweimal durch die Lage der dreifachen Geraden hindurch. Es gibt auf der dreifachen Geraden zwei höhere singuläre Punkte. Mark 40.—.

„ 8*. **Regelfläche mit einem Doppelkegelschnitt und einer ihn schneidenden Doppelgeraden.** Als Doppelkegelschnitt ist ein Kreis gewählt, auf demselben, sowie auf der Doppelgeraden liegen zwei Pinchpoints. Der gemeinsame Punkt des Kreises und der Doppelgeraden ist ein Selbstberührungspunkt der Fläche. Mark 44.—.

„ 9. **Regelfläche mit einer Doppelcurve dritter Ordnung und vier Pinchpoints.** Sie besteht aus einem einzigen Flächenteil, der aus reellen und ideellen Doppelsecanten der Raumcurve dritter Ordnung gebildet wird. Der Fläche gehören vier Tangenten der Raumcurve an, welche den Uebergang von den reellen zu den ideellen Secanten bilden. Mark 40.—.

„ 10. **Regelfläche mit einer Doppelcurve dritter Ordnung ohne Pinchpoints.** Sie wird aus reellen und ideellen Doppelsecanten der Raumcurve dritter Ordnung gebildet, und wiederum sind es vier Tangenten der Raumcurve, welche den Uebergang bilden. Die Fläche besteht aus einem einzigen Teile, der sich längs der ganzen Doppelcurve durchsetzt. Mark 40.—.

Preis der ganzen Serie 380 Mark.

Schon verschiedentlich sind specielle Flächen vierter Ordnung modelliert worden; es sei nur erinnert an die Flächen mit 16 Knotenpunkten, an die Plücker'schen Complexflächen, an eine Art von Flächen mit 12 Knoten, sowie an die Cycliden. Das Modellieren solcher Flächen ist in der Regel eine Folge der genaueren Kenntnis der Eigenschaften derselben. Die Kenntnis verschiedener Eigenschaften der Regelflächen vierter Ordnung ist aber bereits früher durch mehrere Abhandlungen und ein Einblick in ihre verschiedenen Gestalten neuerdings durch die Abhandlung des Verfassers gewonnen worden, so dass die Modelle dieser Regelflächen schon aus diesem Grunde ein allgemeineres Interesse verdienen. Einen zweiten wesentlichen Grund für die Bedeutung und den Wert dieser Modelle findet der Verfasser aber darin, dass sie in der grossen Gattung der Regelflächen so ziemlich die ersten sind. Ausser einigen abwickelbaren Flächen — also Regelflächen speciellster Art — und den drei Regelflächen dritter Ordnung sind Regelflächen nicht modelliert. Und doch sind gerade die Regelflächen besonders instructiv, und die Fadenmodelle haben den grossen Vorzug, dass man ihre Conturen ihrer ganzen Erstreckung nach wirklich sehen kann. Bei den vorliegenden Regelflächen ergeben sich als Projectionen Curven vierter Klasse mit zwei resp. drei Doppeltangenten oder einer dreifachen Tangente, Curven, welche manche Eigentümlichkeiten aufweisen.

Je nach der Art der vielfachen Curve unterscheidet man Regelflächen mit zwei Doppelgeraden, Regelflächen mit einer dreifachen Geraden, Regelflächen mit einem Doppelkegelschnitt und einer Doppelgeraden und Regelflächen mit einer Doppelcurve dritter Ordnung. Flächen der ersten Art stellen die Modelle 1, 2, 3, 4 und 5 vor, Flächen der zweiten Art die Modelle 6 und 7, eine Fläche der dritten Art das Modell 8, und endlich zwei Flächen der letzten Art die Modelle 9 und 10. Die Modelle 1 bis 5 geben über die Flächen der ersten Art einen Ueberblick, während bei den übrigen Arten nur die Fälle modelliert wurden, welche besonders interessant sind und ohne Modelle sich schwerer vorstellen lassen. Noch ist zu erwähnen, dass alle Modelle symmetrisch gebaut sind; dadurch gewinnen sie ungemein an Uebersichtlichkeit, ohne an ihrer Allgemeinheit einzubüssen. Bei den Flächen 1, 2, 3 und 8, 9, 10 sind die Constanten ausserdem so gewählt, dass die Erzeugenden sich in windschiefe Vierseite anordnen lassen, was für die Gestalten dieser Flächen durchaus keine Specialisierung bedeutet.

Den Modellen ist eine $1^1/_2$ Bogen in gr. 8^0 umfassende Abhandlung beigefügt.

Veröffentlicht 1886.

Serie XIV.

Modelle zur Functionentheorie.

Abgüsse nach den im mathematischen Institut der kgl. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen (7. Folge).

Ausgeführt

unter Leitung von Professor Dr. Walther Dyck.

Die vorliegende Serie von Modellen ist entstanden im Anschluss an eine einleitende Vorlesung über Functionentheorie. Die Schwierigkeit einer möglichst anschaulichen Schilderung des Verhaltens einer Function in der Umgebung singulärer Stellen liess den Wunsch aufkommen, auch auf diesem Gebiete und wenigstens für die wichtigsten singulären Vorkommnisse das Hülfsmittel räumlicher Anschauung zu besitzen, das schon auf einer Reihe anderer Gebiete — und besonders durch die von den früheren Leitern des Münchener mathematischen Instituts ausgegangene Anregung — so zweckmässig und fördernd im Unterricht sich erwiesen hat.

Um für gewisse singuläre Punkte einer Function, dann auch für den Gesamtverlauf gewisser Functionstypen eine räumliche Darstellung zu gewinnen, sind (in der bekannten Weise) der reelle und der imaginäre Teil der Werte einer Function über der Ebene des complexen Arguments als Ordinaten aufgetragen. So entstehen für jede Function zwei Flächen (mit R und I bezeichnet), deren gleichzeitige Betrachtung ein Bild des Functionsverlaufs liefert. Auf den Flächen (für welche gleichmässig die Einheit des Massstabes zu 3 cm. gewählt wurde) ist ein System von Niveaulinien und deren Orthogonaltrajectorien aufgetragen. Die durch Projection dieser Curvensysteme auf die Ebene des complexen Arguments entstehenden quadratischen Systeme sind (mit Ausnahme von Nr. 4 und 5, wo es sich nur um die ganz bekannten Kreissysteme handelt) in besonderen Tafeln den Modellen beigegeben; ebenso ist den Modellen ein erläuternder Text beigefügt, welcher in Kürze die wichtigsten geometrischen wie analytischen Beziehungen für die einzelnen dargestellten Functionen entwickelt und auf den bezüglich der näheren Ausführungen hier verwiesen sein mag.

Die Serie enthält folgende Darstellungen:

Die Modelle 1, 2 und 3 veranschaulichen das Verhalten einer Function in der Nähe von Verzweigungsstellen, und zwar:

Nr. 1. Für $w^2 = z^3 - 1$. Zwei Modelle (Grösse 12×12×12 cm.), ausgeführt von Lehramtscandidaten *A. Wildbrett.* Preis für a. und b. je Mark 10.—.

„ 2. Für $w^2 = z^4 - 1$. Zwei Modelle (Grösse 12×12×12 cm.), ausgeführt von Lehramtscandidaten *A. Wildbrett.* Preis für a. und b. je Mark 14.—.

„ 3*. Für $w^4 = 1 - z^2$. Ein Modell (Grösse 12×12×12 cm.), ausgeführt von Lehramtscandidaten *A. Wildbrett.* Mark 16.—.

Die Modelle 4 und 5 dienen zur Darstellung des Zusammenrückens zweier logarithmischer Unendlichkeitspunkte in einen (einfachen) algebraischen, und zwar gibt:

Nr. 4. Die Function $w = \frac{1}{z}$. Ein Modell (Grösse 12×12×12 cm.), ausgeführt von Lehramtscandidaten *A. Wildbrett.* Mark 11.—.

„ 5. Die Function $w = \frac{1}{2\varepsilon} \log \frac{z-\varepsilon}{z+\varepsilon} \left(\varepsilon = \frac{\pi}{4}\right)$. Zwei Modelle (Grösse 12×12×12 cm.), ausgeführt von Assistenten *H. Burkhardt* und stud. math. *J. Kleiber.* Preis für a. und b. je Mark 11.—.

Modell 6 gibt das Verhalten einer Function in der Umgebung des einfachsten, wesentlich singulären Punktes durch

Nr. 6. $6w = e^{\frac{1}{6z}}$. Ein Modell (Grösse 17×18×15 cm.), ausgeführt von stud. math. *J. Kleiber.* Mark 18.—.

Die Modelle 7 bis 10 veranschaulichen den Verlauf der elliptischen Functionen $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ (in der Weierstrass'schen Normalform), und zwar speciell:

Nr. 7* u. 8 für die Invarianten $g_2 = 4$, $g_3 = 0$. Drei Modelle (Grösse 16×16×16 cm.), berechnet und ausgeführt von Assistenten *H. Burkhardt* und Lehramtscandidaten *A. Wildbrett.* Preis für Nr. 7a und b je Mark 32.—, für Nr. 8 Mark 36.—.

Nr. 9* u. 10 für die Invarianten $g_2 = 0$, $g_3 = 4$. Vier Modelle (Grösse 15×22×16 cm.), berechnet und ausgeführt von Assistenten *H. Burkhardt* und Lehramtscandidaten *A. Wildbrett.* Preis für Nr. 9a und b je Mark 35.—, für Nr. 10a und b je Mark 38.—.

Beigegeben ist ein erläuternder Text zu sämtlichen Modellen (1 Bogen gr. 8° umfassend), sowie (in 5 Tafeln) die Darstellung der auf den Flächen eingetragenen Curvensysteme.

Preis der ganzen Serie 330 Mark.

Veröffentlicht 1886.

Serie XV.

Projections-Modelle

der sechs regelmässigen vier-dimensionalen Körper und des vier-dimensionalen vierseitigen Prismas.

Von

Dr. **Victor Schlegel**

in Hagen i. W.

A. Drahtmodelle mit Seidenfäden.

Nr. 1. **Fünfzell,** dargestellt durch ein in 4 Tetraeder zerlegtes regelmässiges Tetraeder. Der Körper enthält 10 Flächen, 10 Kanten, 5 Ecken. (Kante des äusseren Tetraeders 6 cm.) Mark 1.20.

„ 2. **Achtzell,** dargestellt durch ein in 7 Hexaeder zerlegtes regelmässiges Hexaeder. Der Körper enthält 24 Flächen, 32 Kanten, 16 Ecken. (Kante des äusseren Würfels 6 cm.) Mark 4.50.

„ 3. **Sechzehnzell,** dargestellt durch ein in 15 Tetraeder zerlegtes regelmässiges Tetraeder. Der Körper enthält 32 Flächen, 24 Kanten, 8 Ecken. (Kante des äusseren Tetraeders 8 cm.) Mark 4.—.

„ 4. **Vierundzwanzigzell,** dargestellt durch ein in 23 Oktaeder zerlegtes regelmässiges Oktaeder. Der Körper enthält 96 Flächen, 96 Kanten, 24 Ecken. (Kante des äusseren Oktaeders 13 cm.) Mark 18.—.

„ 5. **Sechshundertzell,** dargestellt durch ein in 599 Tetraeder zerlegtes regelmässiges Tetraeder. Der Körper enthält 1200 Flächen, 720 Kanten, 120 Ecken. (Kante des äusseren Tetraeders 69 cm.) Mark 120.—.

„ 6. **Hundertzwanzigzell,** dargestellt durch ein in 119 Dodekaeder zerlegtes regelmässiges Dodekaeder. Der Körper enthält 720 Flächen, 1200 Kanten, 600 Ecken. (Kante des äusseren Dodekaeders 21,5 cm.) Mark 120.—.

„ 7. **Projections-Modell des vier-dimensionalen vierseitigen Prismas** und seiner Zerlegung in vier inhaltsgleiche Fünfzelle. (Seitenkante des Prismas 11 cm.) Mark 4.—.

B. Ansichten, Netze und Modelle aus Cartonpapier

zu Nr. 5 (Sechshundertzell) und Nr. 6 (Hundertzwanzigzell).

Nr. 8. **Zwei Hefte** mit lithograph. Ansichten und Netzen der Modelle 5 u. 6. Mk. 4.—.

„ 9.* **Fünf Carton-Modelle** zu Nr. 5 (Sechshundertzell). Mark 20.—.

„ 10. **Netze** zu Nr. 5, behufs Ausschneiden und Zusammenkleben der Papiermodelle. Mark 1.50.

„ 11.* **Drei Carton-Modelle** zu Nr. 6 (Hundertzwanzigzell). Mark 20.—.

„ 12. **Netze** zu Nr. 6, behufs Ausschneiden und Zusammenkleben der Papiermodelle. Mark 2.50.

Preis der ganzen Serie 300 Mark.

Nr. 1—6. Im vier-dimensionalen Raume gibt es, entsprechend den fünf regelmässigen Körpern des gewöhnlichen Raumes, sechs regelmässige Gebilde, welche von regelmässigen Tetraedern, Hexaedern, Oktaedern oder Dodekaedern so begrenzt werden, dass in jeder Ecke gleichviele Kanten, Flächen und Körper, und in jeder Kante gleichviele Flächen und Körper zusammenstossen. Diese Gebilde sind: 1) das Fünfzell, begrenzt von 5 Tetraedern, 2) das Achtzell, begrenzt von 8 Hexaedern, 3) das Sechzehnzell, begrenzt von 16 Tetraedern, 4) das Vierundzwanzigzell, begrenzt von 24 Oktaedern, 5) das Einhundertzwanzigzell, begrenzt von 120 Dodekaedern, 6) das Sechshundertzell, begrenzt von 600 Tetraedern. — Obwohl diese Gebilde selbst unserer Anschauung unzugänglich sind, kann man dennoch Projectionen derselben im drei-dimensionalen Raume construieren, welche alle an den Gebilden befindlichen Ecken, Kanten, Flächen und Körper in ganz analoger Weise zur Darstellung bringen, wie eine ebene Abbildung die Ecken, Kanten und Flächen eines regelmässigen Polyeders. Diese Projectionskörper enthalten gleichzeitig die Lösung eines rein stereometrischen Problems, nämlich: Ein Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder so in Körper derselben Art zu zerlegen, dass in jeder Ecke gleichviele Kanten, Flächen und Körper, und in jeder Kante gleichviele Flächen und Körper zusammenstossen.

Die Modelle bringen diese vier-dimensionalen Gebilde in Centralprojection zur Darstellung, wobei das Projections-Centrum so gedacht ist, dass kein Grenzkörper einen anderen durchdringt, und ein einziger als Ganzes alle übrigen als seine Teile in sich schliesst.

In allen Modellen sind die Körper durch ihre in Draht und Seide ausgeführten Kanten zur Darstellung gebracht, und zwar so, dass im Allgemeinen die Grenzkanten jeder Polyeder-Schicht in Draht, dagegen die Verbindungskanten je zweier auf einander folgender Schichten in verschiedenfarbiger Seide ausgeführt sind.

Die Modelle wurden zum ersten Male auf der 57. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte (1884) in Magdeburg, sodann (1886) in Darmstadt bei Gelegenheit des Jubiläums der dortigen Hochschule ausgestellt.

Nr. 7. Entsprechend dem zwei-dimensionalen Parallelogramm („ebenen zweiseitigen Prisma") und dem drei-dimensionalen dreiseitigen Prisma gibt es im vier-dimensionalen Raume ein vier-

dimensionales vierseitiges Prisma, begrenzt von zwei congruenten Tetraedern in parallelen drei-dimensionalen Räumen und von vier dreiseitigen Prismen. Wie das Parallelogramm durch einen Diagonalschnitt (Strecke) in zwei inhaltsgleiche Dreiecke zerlegt werden kann, und das dreiseitige Prisma durch zwei Diagonalschnitte (Dreiecke) in drei inhaltsgleiche Tetraeder, so lässt sich das vier-dimensionale vierseitige Prisma durch drei Diagonalschnitte (Tetraeder) in vier inhaltsgleiche Fünfzelle zerlegen. — Und gerade so, wie in einer Ebene zwei congruente Dreiecke mit paarweise parallelen Seiten, deren homologe Ecken verbunden sind, die ebene Parallelprojection eines dreiseitigen Prismas darstellen, so lässt sich auch durch analoge Construction die räumliche Parallelprojection eines vier-dimensionalen vierseitigen Prismas herstellen. Dasselbe gilt auch von der oben erwähnten Zerlegung.

Modell Nr. 7 gibt diese Projection des vier-dimensionalen vierseitigen Prismas und seiner Zerlegung in vier inhaltsgleiche Fünfzelle, wobei die Kanten des Prismas durch Messingdraht, die neu hinzukommenden Kanten der teilenden Tetraeder durch Seide dargestellt sind.

Das Modell bezweckt einerseits, die Übung in den strengen Analogieschlüssen, welche aus dem Gebiete der drei-dimensionalen Geometrie in das der vier-dimensionalen führen, durch ein anschauliches und (vermöge der Mannigfaltigkeit der darin vorkommenden Gebilde) vielseitiges Beispiel zu fördern. Andrerseits soll es zur Einübung desjenigen Denkprozesses dienen, vermöge dessen ein räumliches Gebilde ebenso als Projection eines vier-dimensionalen erkannt wird, wie eine ebene Zeichnung als Projection eines drei-dimensionalen.

Nr. 8—12. Die zu Nr. 5 u. 6 der Modelle gehörigen H e f t e enthalten A n s i c h t e n und N e t z e zu den Vielflachen dieser beiden complicierteren Drahtkörper. Die Modelle aus Cartonpapier sind aus diesen Netzen zusammengefügt und zeigen die schalenförmig sich umschliessenden Polyeder jener beiden Drahtkörper. Die Hefte und Cartonmodelle dürften sowohl für diejenigen Mathematiker von Interesse sein, welche der Betrachtung und dem Studium der Projectionsmodelle der regelmässigen vier-dimensionalen Körper an sich ihre Aufmerksamkeit schenken, wenn sie auch nicht im Besitz

der Modelle sind, als auch für diejenigen Kreise, welche jene zwei grossen Drahtkörper von der Verlagshandlung bereits bezogen haben. Wird doch das Anschauungsvermögen bei Betrachtung der einzelnen Teile der Drahtkörper durch Vergleichung derselben mit den Cartonmodellen wesentlich unterstützt, da bei letzteren vermöge ihrer Darstellungsweise, entgegen den Drahtkörpern, alle Kanten weniger ins Auge fallen, die Flächen jedes einzelnen Körpers dagegen mehr hervortreten und eine klarere Vorstellung von der Gestaltung jedes einzelnen Polyeders ermöglichen. Wenn auch ein richtiges Gesamtbild allerdings dann wiederum nur durch die grossen Drahtkörper ermöglicht wird, so bilden in vorerwähntem Sinne die Cartonmodelle eine wünschenswerte Ergänzung der Drahtkörper, die ohne grossen pecuniären Aufwand beschafft werden kann.

Für diejenigen Mathematiker, welche eine Herstellung der Cartonmodelle selbst vorzunehmen wünschen, ist die Einrichtung getroffen, dass die Cartonpapierstreifen mit den lithographierten Netzen zu oben bemerkten Preisen von der Verlagshandlung in gleicher Weise wie die Hefte mit den Ansichten separat bezogen werden können.

Den Nummern 1—7 sind Erläuterungen beigefügt.

Veröffentlicht 1886.

Serie XVI.

Gips-Modelle zur Lehre von den confocalen Flächen zweiten Grades

im Anschluss an einige von Professor Dr. **E. R. Neovius** in Helsingfors angefertigte Modelle.

A. Krümmungslinien des Ellipsoids und conforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel.

Nr. 1.* **Ellipsoid mit drei Hauptschnitten und achtzehn Krümmungslinien.** (Grösse 16 × 14 × 9 cm.) Von Professor *Neovius*.

„ 2.* **Rechteckige Platte,** beiderseitig mit geraden Linien versehen, welche einzeln den auf dem Modell Nr. 1 ersichtlich gemachten krummen Linien entsprechen. (Grösse 16 × 13 cm.)

„ 3.* **Kugel mit drei grössten Kreisen und achtzehn confocalen sphärischen Kegelschnitten.** (Grösse 14,5 cm.) Von Professor *Neovius*.

Preis mit Untersatz Mk. 30.—.

B. Confocale Flächen zweiten Grades.

„ 4. **Einschaliges Hyperboloid.** (Höhe 21 cm.) Mark 13.—.
Das durch dieses Modell dargestellte einschalige Hyperboloid ist zu dem durch Modell Nr. 1 dargestellten Ellipsoid confocal und geht durch eine der auf dem Modelle dieses Ellipsoids zur Anschauung gebrachten Krümmungslinien hindurch. Von jeder der beiden Scharen der geradlinigen Erzeugenden des einschaligen Hyperboloids sind auf dem Modelle 32 Individuen zur Anschauung gebracht.

„ 5. **Zweischaliges Hyperboloid.** (Grösse 21×30 cm.) Mark 16.—.
Dieses Modell besteht aus zwei, durch eiserne Stäbe mit einander verbundenen Stücken. Das dargestellte zweischalige Hyperboloid ist zu dem durch Modell Nr. 1 dargestellten Ellipsoid und zu dem durch Modell Nr. 4 dargestellten einschaligen Hyperboloid confocal und geht durch eine der auf dem Ellipsoidmodell zur Anschauung gebrachten Krümmungslinien hindurch.

Nr 6. **Vereinigung eines Ellipsoids mit einem confocalen einschaligen Hyperboloid.** Durchdringung der Modelle 1 und 4. Mark 16.—.

„ 7.* **Vereinigung eines Ellipsoids mit einem confocalen zweischaligen Hyperboloid.** Durchdringung der Modelle 1 und 5. Mark 18.—.

„ 8. **Vereinigung eines einschaligen Hyperboloids mit einem confocalen zweischaligen Hyperboloid.** Durchdringung der Modelle 4 und 5. Mark 18.—.

„ 9.* **Vereinigung eines Ellipsoids mit einem confocalen einschaligen und einem confocalen zweischaligen Hyperboloid.** Durchdringung der Modelle 1, 4 und 5. Mark 22.—.

Preis der ganzen Serie 125 Mark.

Nr. 1—3. Wenn es sich darum handelt, auf einem Modelle einer Fläche zweiten Grades, insbesondere auf der Oberfläche eines Ellipsoids, die beiden Scharen der Krümmungslinien dieser Fläche durch eine grössere oder kleinere Anzahl der zu diesen Scharen gehörenden Curven zur Anschauung zu bringen, und wenn zugleich die wohlberechtigte Forderung gestellt wird, dass diese Curven möglichst gleichmässig auf der Fläche verteilt sein sollen, so ist die Auswahl der auf dem Modelle ersichtlich zu machenden Curven keineswegs willkürlich.

Da nun die Flächen zweiten Grades die Eigenschaft haben, durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate geteilt werden zu können, so liegt der Gedanke nahe, bei der erwähnten Auswahl von der Forderung auszugehen, dass je zwei benachbarte der zur Anschauung zu bringenden Krümmungslinien der einen Schar und je zwei solche benachbarte Krümmungslinien der andern Schar auf dem Ellipsoid ein krummliniges Viereck begrenzen sollen, welches in gewissem Sinne einem Quadrate möglichst nahe kommt.

Die Unbestimmtheit, mit welcher diese Forderung behaftet zu sein scheint, verschwindet, sobald diejenige conforme Abbildung der Ellipsoidoberfläche auf eine Ebene ins Auge gefasst wird, bei welcher den Krümmungslinien des Ellipsoids gerade Linien der Ebene entsprechen.

Es entsteht auf diese Weise die Aufgabe, zu untersuchen: „Wie muss ein Ellipsoid beschaffen sein, damit die Oberfläche desselben durch seine Hauptschnitte und eine endliche Anzahl seiner Krümmungslinien in eine endliche Anzahl solcher krummliniger Vierecke geteilt werden kann, welche sämtlich in Rücksicht auf die erwähnte conforme Abbildung Quadraten möglichst nahe kommen?“

Diese Frage hat Herr Dr. E. R. Neovius, Professor der Mathematik an der Universität zu Helsingfors, in einer Abhandlung beantwortet, welche unter dem Titel: „Anwendung der Theorie der elliptischen Functionen auf eine die Krümmungslinien eines Ellipsoids betreffende Aufgabe“ im Jahre 1885 im 15. Bande der Acta Societatis Scientiarum Fennicae veröffentlicht worden ist.

Gleichzeitig mit der erwähnten Abhandlung sind der Finnländischen Gesellschaft der Wissenschaften einige Modelle vorgelegt worden, durch welche das Ergebnis der angestellten Untersuchung für einen ausgewählten speciellen Fall in höchst instructiver Weise zur Anschauung gebracht wird.

Das Ellipsoid, dessen Constanten von Professor Neovius berechnet worden sind, ist durch folgende Festsetzungen bestimmt:

a. Die Halbaxen des Ellipsoids sollen die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden.

b. Die Fläche jedes Oktanten des Ellipsoids soll durch vier Krümmungslinien der den einschaligen confocalen Hyperboloiden entsprechenden Schar und fünf Krümmungslinien der den zweischaligen confocalen Hyperboloiden entsprechenden Schar in $5 \cdot 6 = 30$ krummlinige Vierecke zerlegt werden können, welche in dem angegebenen Sinne Quadraten möglichst nahe kommen.

Bei diesem Modelle lässt die durch die Verfolgung des angegebenen Gedankens erreichte Gleichmässigkeit der Verteilung der zur Anschauung gebrachten Krümmungslinien kaum etwas zu wünschen übrig. In dieser Beziehung dürfte dieses Modell alle anderen bisher in den Handel gebrachten Ellipsoid-Modelle, auf denen Krümmungslinien zur Anschauung gebracht sind, übertreffen.

Aus dem angegebenen Grunde eignet sich dieses Modell in vorzüglicher Weise auch zur anschaulichen Erläuterung der Bedeutung des Satzes, dass die Oberfläche eines Ellipsoids durch die beiden Scharen der Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate geteilt werden kann.

Die Hauptschnitte des Ellipsoids sind durch rote, die übrigen zur Anschauung gebrachten Krümmungslinien sind durch schwarze Linien bezeichnet.

Die rechteckige Platte dient zur Veranschaulichung der conformen Abbildung der Oberfläche des durch das Modell Nr. 1 dargestellten Ellipsoids auf die doppelt zu denkende Fläche eines Rechtecks. Die Eckpunkte des Rechtecks entsprechen den Nabelpunkten des Ellipsoids. Den Krümmungslinien des Ellipsoids entsprechen hierbei Parallelen zu den Seiten des Rechtecks.

Die Kugel stellt diejenige conforme Abbildung der Oberfläche des Ellipsoids auf eine Kugel dar, bei welcher den drei Hauptschnitten des Ellipsoids drei grösste Kreise der Kugel entsprechen.

Wegen der Einzelheiten, insbesondere bezüglich der Bestimmung der Werte derjenigen Constanten, welche bei der Herstellung der Modelle 1, 2 u. 3 zu Grunde

gelegt worden sind, wird auf die angeführte Abhandlung von Professor Neovius verwiesen.

Zu den Modellen gehört ein gemeinsamer **Holzuntersatz,** welcher dazu dient, diese in eine solche Lage zu bringen, dass die Mittelpunkte sich in gleicher Höhe befinden, während die Ebenen der drei einander entsprechenden Hauptschnitte parallele Lage erhalten.

Nr. 4—9 sind zunachst hergestellt in Exemplaren, welche sich in der unter Leitung von Herrn Professor H. A. Schwarz stehenden Königl. Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle der Universität Göttingen befinden. Die zu ihrer Herstellung erforderlichen Rechnungen und Zeichnungen sind von Herrn R. Haussner, Studiosus der Mathematik an der Universität Göttingen, ausgeführt worden. Die Modelle 6—9 bilden eine Ergänzung zu den bisher in den Handel gebrachten Modellen von Flächen zweiten Grades und werden denjenigen Lehrern der höheren Mathematik gewiss höchst willkommen sein, die bei ihrem Unterrichte auf die Lehre von den confocalen Flächen zweiten Grades in mehr oder weniger ausführlicher Weise eingehen und den Wunsch haben, ihren Zuhörern die Gewinnung einer deutlichen Vorstellung der gegenseitigen Lage eines Ellipsoids und der beiden Arten der zu demselben confocalen Hyperboloide durch Anschauung geeigneter, in passenden Grössenverhältnissen ausgeführter Modelle zu erleichtern.

Die Modelle dieser Serie sind von Herrn Professor *H. A. Schwarz* der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vorgelegt worden.

Veröffentlicht 1888.

Serie XVII.

Gipsmodelle verschiedener Art.

No. 1. **Modell einer Minimalfläche, welche eine Schar reeller Parabeln enthält,** deren Ebenen mit einer festen Ebene des Raumes einen constanten Winkel einschliessen. Modelliert unter Leitung von Professor Dr. *E. R. Neovius* von *Hj. Tallqvist*, Studierendem an der Universität zu Helsingfors. (Grösse des Gipsmodells 21×25 cm.) Mark 40.—.

„ 2. **Die sieben Haupttypen der ebenen Curven 3. Ordnung,** nach Möbius auf einer Kugel dargestellt. Unter Leitung von Professor Dr. *Brill* modelliert von cand. math. *Dollinger* in Tübingen. Zwei Modelle in Gips. (Durchmesser 10 cm.) Preis zusammen Mark 10.—.

„ 3. **Flächen von constantem positiven Krümmungsmass** mit einem System ebener Krümmungslinien nach Enneper. Von Studienlehrer Dr. *Sievert* in Nürnberg. Zwei Modelle in Gips: Der elliptische und der cyclische Typus. (Grösse 16×16×8 u. 16×15×14 cm.) Preis zusammen Mark 18.—.

„ 4. **Modell der Catalan'schen Minimalfläche.** Modelliert unter Leitung von Professor Dr. *E. R. Neovius* von *J. Laine*, Studierendem an der Universität zu Helsingfors. (Grösse des Gipskörpers 22×22×14 cm.) Mark 40.—.

Modelle zur Functionentheorie,

angefertigt auf Veranlassung von Professor Dr. *Dyck* im mathematischen Institut der Kgl. technischen Hochschule in München. (8. Folge).

„ 5. **Orthogonalsysteme auf der Kugel,** ausgeführt von Assistenten *J. Kleiber*. (Durchm. 15 cm.) Die Modelle geben quadratische Einteilungen auf der Kugel

a. u. b. durch zwei aufeinander senkrechte Kreissysteme mit zwei getrennten, bezw. zusammenfallenden Polen. Preis zusammen Mark 26.—

c. durch zwei Scharen von aufeinander senkrechten Loxodromen. Mk. 8.50.

„ 6. **Die den regulären Polyedern entsprechenden regulären Gebietseinteilungen auf der Kugel.** (Durchmesser 9 cm.) Die Modelle geben

a. den Tetraedertypus, Einteilung in 24 Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$. Mark 5.70.

b. den Oktaedertypus, Einteilung in 48 Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$. Mark 7.—.

c. den Ikosaedertypus, Einteilung in 120 Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$. Mark 8.—.

Modelle zur Flächentheorie,

angefertigt unter Leitung von Professor Dr. *Dyck* und Professor Dr. *Finsterwalder* im mathematischen Institut der Kgl. techn. Hochschule in München. (8. Folge.)

Nr. 7 a, b, c, d. **Modelle für die verschiedenen Typen konischer Knotenpunkte mit Angabe des Verlaufes der parabolischen Curve und der Haupttangentencurven in der Umgebung dieser Punkte.** Ausgeführt von Professor *A. Sucharda* in Prag. Die vier dargestellten Typen konischer Knotenpunkte unterscheiden sich nach der Realität der sechs Schnittgeraden der durch die Glieder zweiter und dritter Ordnung gegebenen Näherungskegel. (Höhe ca. 20 cm.) Preis zusammen Mark 75.—.

Modelle zur mathematischen Physik,

angefertigt auf Veranlassung von Professor Dr. *F. Klein* in Göttingen von Oberlehrer Dr. *Schellenberg* in Mülheim a. d. R.

„ 8 a u. b. **Modelle zur Darstellung der Gestaltsänderungen einer schwingenden Saite** (Fortpflanzung stehender Wellen). Die Modelle zeigen die Änderungen der Gestalt der schwingenden Saite mit der Zeit und zwar a) für die gezupfte, b) für die angeschlagene Saite. (Grösse 33×26×7 cm.) Preis für 8 a Mark 16.—; für 8 b Mark 20.—.

„ 9 a, b u. c. **Modelle zur Theorie der Wärmeströmung in einem Stabe** (2 Modelle) **und in einem Ringe** (1 Modell). Die Modelle versinnlichen die Ausbreitung der ursprünglich in einem Punkte zugeführten Wärmemenge über den Stab (bezw. Ring) in ihrem zeitlichen Verlaufe. (Grösse 28×17×18 cm.) Preis für 9 a Mark 16.—; für 9 b Mark 18.—; für 9 c Mark 20.—.

Modelle einiger Riemann'schen Flächen.

„ 10. **Zweiblättrige einfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche,** welche in ihrem Innern einen Windungspunkt **erster** Ordnung enthält. Mark 2.—.

„ 11. **Dreiblättrige einfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche,** welche in ihrem Innern einen Windungspunkt **zweiter** Ordnung enthält. Mark 2.—.

„ 12. **Dreifach zusammenhängende Riemann'sche Fläche** mit **einer** in sich zurückkehrenden Begrenzungslinie. (Siehe Riemann's Gesammelte mathematische Werke, herausgegeben von H. Weber, Seite 89, Figur 3.) Mark 3.—.

Preis der drei Modelle zusammen Mark 6.—.

„ 13. **Fläche, auf welcher das Ellipsoid durch parallele Normalen conform abgebildet wird.** Von Dr. *K. Reinbeck* in Einbeck. Preis Mark 12.—.

Nr. 1. Dieses Modell stellt diejenige Minimalfläche dar, welche durch geometrische Addition der gewöhnlichen Schraubenfläche und der sog. Catalan'schen Minimalfläche entsteht. Die Catalan'sche Fläche enthält bekanntlich eine Schar reeller Parabeln, deren Ebenen alle auf einer festen Ebene senkrecht stehen. Auf der Additionsfläche liegt ebenfalls eine Schar reeller Parabeln, deren Ebenen mit einer festen Ebene einen constanten, von 90^0 verschiedenen Winkel einschliessen. Für die durch das vorliegende Modell dargestellte Fläche beträgt die Grösse dieses Winkels 45^0. Durch die auf dem Modell dargestellten Parabeln und deren orthogonale Trajectorien wird die Eigenschaft der Fläche veranschaulicht, dass sie durch die beiden Curvenscharen in unendlich kleine Quadrate geteilt werden kann. Ausser diesen beiden Scharen ist noch die Scheitelcurve der Parabeln auf dem Modell zur Anschauung gebracht.

Nr. 2. Seine schönen Untersuchungen über Curven 3. Ordnung gründet bekanntlich Möbius nicht, wie dies Newton thut, auf die Betrachtung der Kegel dritter Ordnung, deren ebene Schnitte die collinear verwandten Typen ergeben, sondern auf die Schnittcurven dieser Kegel mit einer Kugel, deren Mittelpunkt sich in der Spitze des Kegels befindet. Die so erhaltenen sphärischen Curven haben vor den ebenen den Vorzug, alle gestaltlichen Eigentümlichkeiten der durch Projection aus einander ableitbaren Curvenarten in einem Bilde zu vereinigen.

Von Interesse ist die Spaltung des einen der fünf Newton'schen Typen in drei Unterarten, wie sie auf einer der beiden Kugeln dargestellt sind. Die andere Kugel weist die vier übrigen Typen auf.

Nr. 3. Die eine dieser Flächen bildet in gewisser Hinsicht das Gegenstück zu der Bianchi'schen Fläche von constantem negativen Krümmungsmass (Serie VIII, Nr. 1), während die andere den ersten Fall der allgemeinen Enneper'schen Flächen darstellt.

Nr. 4. Das Modell stellt die sog. Catalan'sche Minimalfläche dar. Diese Fläche gehört bekanntlich zu den Minimalflächen, welche eine Schar reeller Curven zweiten Grades enthalten, und zwar sind bei der Catalan'schen Fläche die Curven zweiten Grades Parabeln. Die Ebenen der Parabeln sind senkrecht auf einer festen Ebene, welche eine Symmetrieebene der Fläche ist. In dieser Symmetrieebene liegt eine von einer gewöhnlichen Cycloide gebildete geodätische Linie der Fläche. Die auf dem Modell dar-

gestellten Parabeln und deren orthogonale Trajectorien veranschaulichen die Eigenschaft der Fläche, dass dieselbe durch die beiden Curvenscharen in unendlich kleine Quadrate geteilt werden kann.

Nr. 13. Das vorliegende Modell stellt diejenige Fläche dar, auf welche das Ellipsoid vermöge der punktweisen Zuordnung durch parallele Normalen in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet wird.

Das Modell soll die Eigenschaft dieser Fläche zur Anschauung bringen — soweit dieses überhaupt durch ein Modell möglich ist —, dass dieselbe durch die beiden Scharen ihrer Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate geteilt werden kann.

Ausserdem ist hervorzuheben, dass dieses Modell zugleich ein Hilfsmittel darbietet, um eine Vorstellung von der Gestalt derjenigen Flächen zu gewinnen, auf welche die übrigen Flächen zweiten Grades, d. h. die beiden Hyperboloide und die beiden Paraboloide durch parallele Normalen conform abgebildet werden.

Den Nummern 1—9 u. 13 ist ein erläuternder Text beigefügt.

Veröffentlicht 1886, 1888, 1891 u. 1898.

Serie XVIII.

Vier Fadenmodelle der Regelflächen dritten Grades,

angefertigt

an der Grossh. technischen Hochschule zu Karlsruhe

unter Leitung des Geh. Hofrats Professor Dr. Wiener

von

Assistenten **C. Tesch.**

Als Leitlinien der Regelflächen dritten Grades können dienen ein Kegelschnitt, als welcher ein Kreis gewählt wurde, eine den Kegelschnitt schneidende und eine ihn nicht schneidende Gerade. Es sind die vier Hauptfälle in den Modellen dargestellt.

Nr. 1.* Die eine der Leitgeraden schneidet die Ebene des Leitkegelschnittes innerhalb desselben. Mark 25.—.

„ 2. Die eine der Leitgeraden schneidet die Ebene des Leitkegelschnittes ausserhalb desselben. Mark 25.—.

„ 3. Die eine der Leitgeraden schneidet die Ebene des in das Unendliche gerückten und durch einen Richtkegel bestimmten Leitkegelschnittes ausserhalb desselben. Mark 25.—.

„ 4.* Die beiden Leitgeraden fallen in eine den Leitkegelschnitt schneidende Gerade zusammen. Man erhält dadurch die Cayley'sche Fläche. Mark 25.—.

Preis der ganzen Serie 90 Mark.

Die Erzeugenden der Flächen sind durch schwächere, die Leitgeraden durch stärkere Fäden bezeichnet, und die Schnittpunkte beider durch Perlen hervorgehoben. Der Leitkreis ist durch Fäden seiner Ebene und durch Perlen veranschaulicht, welche in den Schnittpunkten dieser Fäden mit den Erzeugenden der Fläche aufgezogen sind. Der Richtkegel in dem dritten Falle ist durch seine Erzeugenden dargestellt.

Die den Kegelschnitt schneidende Leitgerade ist eine Doppellinie der Fläche, welche in dem ersten Falle in ihrem ganzen

Verlaufe reell der Fläche als Doppellinie angehört, im zweiten und dritten Falle dagegen nur zum Teil in dieser Weise, zum anderen Teil als isolierte Linie sich darstellt. In diesen Fällen treten in den Grenzpunkten dieser Teile Cuspidalpunkte auf, von denen reelle Kanten der Fläche ausgehen. Im zweiten Falle ist der zwischen den Cuspidalpunkten gelegene endliche Teil die reelle Doppellinie, der durch das Unendliche gehende Teil die isolierte Linie, im dritten Falle der endliche Teil der isolierte, der durch das Unendliche gehende Teil die reelle Doppellinie. Im vierten Falle bildet die einzige Leitgerade sowohl eine Doppellinie als auch eine Kante der Fläche.

Modelle dieser Art in grösseren Maßen befinden sich in der Sammlung der Grossh. technischen Hochschule zu Karlsruhe. Diejenigen des ersten und zweiten Falles wurden von *Heinr. Schaumkell* in den Jahren 1882 und 1883, dasjenige des vierten Falles von *Barth. Hendriks* im Jahre 1887 angefertigt. Der Verfasser unterzog sie auf Anregung des Geh. Hofrats Professor Dr. *Wiener* einer neuen Bearbeitung und construierte Modelle in kleineren Maßen in den Räumen von Würfeln von 20 cm. Seitenlänge.

Veröffentlicht 1891.

Serie XIX.

Zehn Modelle* zur Darstellung von regulären Gebietsteilungen des Raumes.

Von

Dr. **A. Schoenflies.**

Privatdocenten an der Universität zu Göttingen.

Eine reguläre Raumteilung ist eine solche Zerlegung des Raumes in lauter gleiche Bereiche, bei welcher jeder Bereich auf analoge Art von den Nachbarbereichen umgeben ist. Eine regelmässige Anordnung von Würfeln oder beliebigen Parallelepipeden bildet den einfachsten Fall derselben. Die Zahl derartiger Raumteilungen ist unbegrenzt gross.

Die Modelle dienen dazu, an einigen Beispielen die Art und Weise zu veranschaulichen, in welcher sich die Raumteilung aus den einzelnen Bereichen aufbaut.

Die Form der einzelnen Bereiche kann sehr mannigfaltig gewählt werden. Ihre Begrenzung unterliegt der Bedingung, gewisse gerade Linien zu enthalten, im übrigen ist sie in den meisten Fällen der verschiedensten Wandlungen fähig. Sie ist für alle Modelle möglichst einfach angenommen worden. Aus technischen Gründen empfiehlt es sich, nur ebene Grenzflächen zuzulassen; im theoretischen Interesse liegt es, die stets vorhandene Beziehung zu den Symmetrie-Axen und den Gestalten des Würfels und Quadrat-Oktaeders möglichst hervortreten zu lassen. Dies sind die Gesichtspunkte, welche für die den Bereichen aufgeprägten Formen massgebend gewesen sind.

Die Serie besteht aus **zehn verschiedenen Typen.** Von jedem Typus ist ein grosserer Block hergestellt, welcher die Anordnung der Bereiche deutlich erkennen lässt; er stellt denjenigen Korper

dar, welcher durch vorschriftsmässige Zusammsetzung von ungefähr zwölf einzelnen Bereichen entsteht. Um diesen Block nach den verschiedensten Richtungen vergrössern zu können, werden von jedem Typus ausserdem einige Einzelbereiche geliefert. Die Art, in welcher dieselben an den Block anzusetzen sind, ist, soweit nötig, kenntlich gemacht worden.

Die Serie dürfte nicht allein für das geometrische Problem der singulären Raumteilung von Interesse sein, sondern auch für die *physikalischen*, *mineralogischen* und *sonstigen naturwissenschaftlichen* Disciplinen, für welche die regelmässige Anordnung gleichartiger Molekeln theoretische Bedeutung besitzt.

Eine Abhandlung ist beigefügt.

Preis der ganzen Serie 140 Mark.

Auf Wunsch werden von jedem Modell-Typus weitere Einzelsteine zum Preise von je 50 Pfg. nachgeliefert.

Veröffentlicht 1891.

Serie XX.

Fünf Fadenmodelle der Regelschraubenflächen.

Die Modelle Nr. 1—3 sind nach den
an der Grossh. technischen Hochschule zu Karlsruhe
unter Leitung von Geh. Hofrat Professor Dr. Wiener
hergestellten Originalen
entworfen von
Assistenten **C. Tesch.**

Nr. 1 a. **Die abwickelbare Schraubenfläche.** Es ist $\varepsilon = \sigma$, der Schnitt normal zur Axe ist eine gemeine Kreisevolvente. Mark 35.—.

„ 1 b. Dieselbe Fläche aus Carton hergestellt. Mark 5.—.

„ 2. **Die verschlungene Regelschraubenfläche.** Es ist $\varepsilon < \sigma$; der Normalschnitt ist eine verschlungene Kreisevolvente. Mark 35.—.

„ 3. **Die geschweifte Regelschraubenfläche.** Es ist $\varepsilon > \sigma$; der Normalschnitt ist eine geschweifte Kreisevolvente. Mark 35.—.

„ 4. **Die gerade geschlossene Schraubenfläche** (Wendelfläche), bei der die Erzeugenden die Schraubenaxe senkrecht treffen. Mark 30.—.

„ 5. **Die schiefe geschlossene Schraubenfläche,** bei der die Erzeugenden die Schraubenaxe schief treffen. Mark 30.—.

Höhe der Modelle 22 cm.

Preis der ganzen Serie 160 Mark.

Wird eine Schraubenfläche durch eine Gerade erzeugt, die einer Schraubenbewegung unterworfen wird, so unterscheidet man dabei geschlossene und offene Schraubenflächen, je nachdem die geschraubte Gerade die Schraubenaxe trifft oder nicht trifft.

Nr. 1—3. Ist für eine offene Regelschraubenfläche σ der Steigungswinkel der Kehlschraubenlinie, ε der Neigungswinkel der Erzeugenden gegen eine zur Schraubenaxe normale Ebene, so sind die durch die Modelle 1—3 dargestellten Fälle durch die Bedingungen $\varepsilon = \sigma$, $\varepsilon < \sigma$ und $\varepsilon > \sigma$ unterschieden.

Die Erzeugenden der Flächen sind durch schwächere Fäden, die vorkommenden Doppellinien durch stärkere Fäden bezeichnet. Bei den Nummern 1 und 3 stellt ausserdem die aus einem Zinkstreifen gebildete Schraubenlinie des Gestelles eine Doppellinie dar.

Der abwickelbaren Schraubenfläche ist noch die Abwickelung beigegeben.

Nr. 4 u. 5. Diese Modelle stellen die geschlossenen Schraubenflächen dar, da sie gerade diejenigen Fälle ausmachen, die bei den in der Technik gebräuchlichen Schrauben zur Anwendung kommen. Der erste Fall kommt (in Verbindung mit cylindrischen Begrenzungen) bei Schrauben mit flachem Gewinde zur Verwendung, der zweite Fall bei Schrauben mit scharfem Gewinde.

Den Nummern 1—3 ist eine Abhandlung beigefügt.

Veröffentlicht 1891 u. 1898.

Serie XXI.

Fadenmodelle der abwickelbaren Flächen der Raumcurven 4. Ordnung zweiter Species.

Von

Dr. **Karl Rohn,**

Professor der Mathematik an der Königl. technischen Hochschule zu Dresden.

Nr. 1. **Raumcurve 4. Ord. mit 4 reellen Tangenten, die sie noch ausserdem schneiden; sie besitzt keine reellen Punkte mit Wendeebenen und liegt ganz im Endlichen.** Die Trisecanten schneiden die Curve, die ganz im Endlichen liegt, teils in drei, teils in einem reellen Punkte. Die abwickelbare Fläche liegt teils ausserhalb, teils innerhalb des Hyperboloids, das sie längs jener Tangenten durchdringt; ihre Doppelcurve liegt ganz ausserhalb und ruht mit 4 Spitzen auf demselben auf. Die Raumcurve 4. Ord. kann als ebene Curve mit dreifachem, oder mit drei reellen Doppelpunkten, worunter auch einer oder zwei isoliert sein können, oder mit einem reellen und zwei conjugiert imaginären Doppelpunkten projiciert werden. Mark 60.—.

„ 2. **Raumcurve 4. Ord. mit 4 reellen Punkten mit Wendeebenen;** es gibt dann keine reellen, sie schneidenden Tangenten. Die Curve liegt ganz im Endlichen; alle Trisecanten treffen sie nur in einem reellen Punkte. Die abwickelbare Fläche liegt ganz ausserhalb des Hyperboloids; ihre Doppelcurve durchdringt das Hyperboloid in jenen 4 Punkten, welche Pinchpoints für sie sind; die beiden Stücke der Doppelcurve im Innern des Hyperboloids verlaufen isoliert. Die Raumcurve 4. Ord. lässt sich als ebene Curve mit drei reellen Doppelpunkten, worunter auch einer oder zwei isoliert sein können, oder mit einem reellen und zwei conjugiert imaginären Doppelpunkten projicieren. Mark 50.—.

„ 3. **Raumcurve 4. Ord. ohne reelle Punkte mit Wendeebenen und ohne reelle, sie schneidende Tangenten.** Die Curve verläuft vier Mal durchs Unendliche und kann überhaupt nicht ganz ins Endliche gelegt werden. Die abwickelbare Fläche liegt ganz innerhalb des Hyperboloids; ihre Doppelcurve ist imaginär. Die Raumcurve projiciert sich mit dreifachem Punkte, oder mit drei reellen Doppelpunkten, von denen einer isoliert sein kann. Mark 30.—.

„ 4. **Raumcurve 4. Ord. mit zwei Streckungspunkten,** in denen drei consecutive Curvenpunkte in gerader Linie liegen. Diese Curve ist speciell, sie bildet den Uebergang von 1 nach 2. Die abwickelbare Fläche zeigt eine Doppelcurve von gleicher Beschaffenheit, wie die gegebene Raumcurve und ausserdem zwei Rückkehrgeraden, nämlich die Tangenten in den Streckungspunkten. Im Fall 1 vereinigen sich diese Rückkehrgeraden mit der Doppelcurve, wobei dann die Spitzen entstehen; im Fall 2 verschwinden sie. Mark 40.—.

Nr. 5. **Raumcurve 4. Ord. mit zwei reellen Punkten mit Wendeebenen und zwei reellen, sie schneidenden Tangenten**; sie verläuft zwei Mal durchs Unendliche, kann aber ganz ins Endliche gebracht werden. Von dem Fundamentaltetraeder sind hier nur noch zwei Gegenkanten reell, von denen eine als Axe des Hyperboloids in der Ebene des Kehlkreises gewählt ist. Die Raumcurve ist nur noch in Bezug auf diese Axe symmetrisch. Die abwickelbare Fläche liegt teils im Innern des Hyperboloids, teils ausserhalb; ihre Doppelcurve ruht in zwei Spitzen auf demselben und durchdringt es in zwei anderen Punkten; letztere sind wieder Pinchpoints der Fläche. Das Stück der Doppelcurve, welches ausserhalb des Hyperboloids sich befindet, verläuft isoliert. Mark 50.—.

„ 6. **Specialfall des vorigen.** Die beiden Punkte mit Wendeebenen fallen mit den Schnittpunkten der beiden schneidenden Curventangenten zusammen. Natürlich ist auch diese Curve nur in Bezug auf eine Axe symmetrisch. Die abwickelbare Fläche besitzt eine dreifache Curve — im Modell ist sie ein Kreis —, die dadurch entsteht, dass im Fall 5 jede Spitze der Doppelcurve mit einem ihrer beiden Durchdringungspunkte (Pinchpoints der Fläche) zusammenrückt. Ein Teil des dreifachen Kreises liegt im Innern des Hyperboloids, durch ihn geht nur ein Flächenmantel, der andere Teil liegt ausserhalb und in ihm durchsetzen sich drei Flächenmäntel. Mark 45.—.

„ 7. **Raumcurve 4. Klasse, die aus No. 6 durch reciproke Raumtransformation abgeleitet ist**; sie liegt auf einem Kreiscylinder und besitzt zwei Spitzen. Die Erzeugenden ihrer abwickelbaren Fläche liegen zu drei und drei in den Tangentialebenen jenes Cylinders, und deren Doppelcurve ist wieder eine Raumcurve 4. Ord. Mark 45.—.

Aeussere Begrenzung der Modelle 20 cm.

Preis der ganzen Serie 300 Mark.

Von den Raumcurven 4. Ordnung erster Species und ihren abwickelbaren Flächen existieren bereits mehrfältig Fadenmodelle. Eine Modellierung der Raumcurven 4. Ordnung zweiter Species bietet indes in mancherlei Hinsicht noch grösseres Interesse als die vorerwähnten Raumcurven und scheint nur wegen der sich dabei darbietenden Schwierigkeiten bislang unterblieben zu sein. Einmal lassen sich die Curven 4. Ord. erster Species als Schnitt zweier Flächen 2. Grades (zweier Kegelflächen) leichter vorstellen und ihre verschiedenen Gestalten leichter übersehen, als dieses bei den Raumcurven 4. Ord. zweiter Species der Fall ist, die als teilweiser Schnitt eines Hyperboloids mit einer Fläche 3. Grades erscheinen. Zum andern ist der Reichtum der Gestalten bei letzteren grösser, als bei ersteren. Drittens zeigen sich bei letzteren Vorkommnisse, die bei ersteren nicht eintreten können, und die besonders

auf die Gestaltung der abwickelbaren Fläche und ihrer Doppelcurve von wesentlichem Einfluss sind. Es ist hier das Vorkommen von Curventangenten gemeint, die die Curve noch in einem weiteren Punkte schneiden.

Bei den Raumcurven 4. Ord. zweiter Species existiert ein Fundamentaltetraeder; in Bezug auf dieses gruppieren sich die Curvenpunkte zu je vier derart, dass ihre 6 Verbindungslinien die Gegenkanten des Tetraeders paarweise treffen und dass sie durch die Kanten harmonisch getrennt werden. Drei der Kanten des Tetraeders sind Doppelsecanten der Curve, sie schneiden sich in einer Tetraederecke, die wir als Hauptpunkt bezeichnen. Das Tetraeder ist zugleich Polartetraeder für das Hyperboloid, auf dem die Curve gelegen ist. Bei den Modellen 1, 2, 3 und 4 wurde nun ein Rotationshyperboloid, sein Mittelpunkt als Hauptpunkt und seine Axen als Doppelsecanten aus ihm gewählt. Es ist das keine Specialisierung, kann vielmehr aus der allgemeinen Lage durch räumliche Collineation abgeleitet werden. Zu jedem Curvenpunkte findet man dann drei weitere, indem man auf die Axen Lote fällt und diese um sich verlängert; d. h. dreht man die Curve um eine der drei Axen um 180^0, so nimmt sie wieder die nämliche räumliche Lage ein. Durch Verwendung dieser Symmetrieverhältnisse in Bezug auf die Axen gewinnt die Raumcurve und ihre abwickelbare Fläche ungemein an Übersichtlichkeit. Als Curvenpunkte von besonderer Bedeutung treten erstens die 4 Punkte mit Wendeberührebenen (Ebenen mit 4 consecutiven Curvenpunkten) auf. Die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche geht durch sie hindurch und sie erscheinen deshalb als Pinchpoints derselben. Zweitens gibt es 4 Curventangenten, die die Curve noch in einem weiteren Punkte schneiden. Diese Punkte bilden Spitzen für die Doppelcurve, und längs jener Tangenten durchschneidet die abwickelbare Fläche das Hyperboloid.

Es mag noch erwähnt werden, dass von dem Hyperboloid, auf dem die Raumcurve liegt, bei den Modellen nur die Schar von Erzeugenden angegeben ist, welche Trisecanten derselben sind.

Eine Abhandlung wird beigefügt.

Veröffentlicht 1892.

Serie XXII.

Drei Cartonmodelle über die Krümmung der Flächen.

Nach den an der Grossh. techn. Hochschule zu Karlsruhe unter Leitung von Geh. Hofrat Professor Dr. **Chr. Wiener** hergestellten Originalen entworfen von

Ingenieur **C. Tesch,**

früher Assistent der darstellenden Geometrie an der techn. Hochschule zu Karlsruhe.

Sind r_1 und r_2 die Hauptkrümmungsradien einer Fläche in einem gewissen Punkte, so sind für das Gauss'sche Krümmungsmass folgende drei Fälle zu unterscheiden:

Nr. 1. $\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} > 0.$ Die Krümmungskreise liegen auf derselben Seite der Berührungsebene.

" 2. $\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} = 0.$ Der eine der Hauptkrümmungskreise ist in eine Gerade übergegangen.

" 3. $\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} < 0$ Die Krümmungskreise liegen auf den entgegengesetzten Seiten der Berührungsebene.

Aus den passend gewählten Hauptkrümmungsradien sind für diese drei Fälle die Krümmungsradien von Normalschnitten in Abständen von 15^0 zu 15^0 bestimmt, und die Krümmungskreise durch Cartonscheiben in den Modellen zur Darstellung gebracht. Sie werden durch eine zweite Schar von Cartonscheiben, welche auf der Flächennormale senkrecht stehen, zusammengehalten.

Höhe der Modelle 18, $15^1/_2$ und $22^1/_2$ cm.

Eine kurze Abhandlung wird beigefügt.

Preis der ganzen Serie 16 Mk.

Veröffentlicht 1894.

Serie XXIII.

Einfache Modelle der Flächen zweiter Ordnung und des Cylindroids,

vorzugsweise zum Gebrauche für Studierende.

A. Gips-Modelle der Flächen zweiter Ordnung.

Diese stellen die fünf Fälle der nicht ausartenden Flächen zweiter Ordnung dar; auf jedem Modell ist eine Anzahl von Curven eingeritzt.

Nr. 1. **Das dreiaxige Ellipsoid** (Grösse 10×8×6 cm.);
a. mit den drei Ellipsen der drei Hauptschnitte und einer Anzahl ebener Schnitte, deren Ebenen auf der grössten Axe senkrecht stehen. Mark 1.50.
b. mit Krümmungslinien. Mark 2.—.

„ 2.* **Das einschalige Hyperboloid** mit Geraden der beiden Scharen von Erzeugenden. Die Innenwandung des Modells enthält den Asymptotenkegel mit den beiden Hauptschnitten. (Höhe 12 cm.) Mark 2.20.

„ 3.* **Das zweischalige Hyperboloid** mit den Hauptschnitten und mit einer Schar paralleler ebener Schnitte, deren Ebenen auf der reellen Axe senkrecht stehen. Das Modell besitzt denselben Asymptotenkegel wie das vorige. Die beiden Schalen der Fläche sind durch Stäbchen in der richtigen Entfernung mit einander verbunden. (Höhe 12 cm.) Mark 2.20.

„ 4. **Das elliptische Paraboloid** (Höhe 11 cm.) Mark 1.80.

„ 5. **Das hyperbolische Paraboloid.** (Grösse $9\times7^1/_2$ cm.) Mark 1.80.
Auf Nr. 4 u. 5 sind die Hauptschnitte und eine Schar von ebenen Schnitten, deren Ebenen zur Paraboloidaxe senkrecht stehen, eingeritzt.

B. Faden-Modelle einiger einfachen Flächen

von Professor Dr. *H. Wiener* in Darmstadt.

„ 6. **Veränderliches Umdreh-Hyperboloid** mit zwei Scharen von Erzeugenden. (Durchmesser 10 cm.) Mark 2.80.
Das Modell stellt ein einschaliges Umdreh-Hyperboloid dar, das durch zwei gleich grosse Kreise begrenzt ist. Dadurch, dass die Schnittpunkte beider Scharen von Erzeugenden mit dem einen Begrenzungskreis festgehalten werden, während in dem anderen die Schnittpunkte der einen Schar gegen die der zweiten Schar gedreht werden, ändert das Hyperboloid seine Gestalt zwischen Cylinder und Kegel als Grenzlagen.

Nr. 7. **Raumcurve vierter Ordnung** mit unendlich fernem isolierten Doppelpunkt. (Grösse 12×14 cm.) Mark 3.20.

Diese Curve, die für die in den Nummern 8 bis 10 dargestellten Gebilde von Bedeutung ist, erscheint als Schnitt dreier Cylinder, von denen der eine ein Umdrehcylinder, die beiden anderen parabolische Cylinder sind. Die drei Cylinder sind in einem Messingrahmen durch Fäden dargestellt.

„ 8a* u. b. **Das rechtwinklige Paraboloid.** Preis je Mark 2.—.

Die Fläche ist durch die (schon in Nr. 7 dargestellte) Raumcurve begrenzt gedacht, in der sie von einem Umdrehcylinder getroffen wird, der dieselbe Axe wie das Paraboloid besitzt. Das ganze Modell besteht aus einem diese Curve darstellenden durchbohrten Messingdraht, zwischen welchem Fäden als Bilder der beiden Scharen von Erzeugenden gezogen sind.

Das Modell ist in zwei Ausführungen angefertigt

a. in der Höhe von 13 cm. und der Breite von 12 cm.

b. in der Höhe von $7^1/_2$ cm. und der Breite von 15 cm.

Bei a ist die Begrenzungscurve dieselbe wie bei Nr. 7; bei b ist sie durch Aufwickelung einer reinen Sinuslinie auf einem Umdreh-Cylinder entstanden gedacht, so dass sie sich nach zwei vollen Wellen schliesst.

„ 9a u. b. **Das Cylindroid (Plückersches Conoid).** Preis je Mark 2.—.

Das Modell besteht aus demselben Begrenzungsdraht, wie das vorige, nur mit anders eingezogenen Fäden. 9a stimmt in seiner Begrenzungscurve mit 8a, 9b mit 8b überein.

„ 10.* **Das Cylindroid und das rechtwinklige Paraboloid vereint.** Mark 5.40.

Das rechtwinklige Paraboloid ist der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei gegebenen Geraden gleichweit abstehen. Es hat zu unendlich vielen Geradenpaaren diese Lage, und diese sind die Erzeugenden eines Cylindroids. Das Modell gibt diese beiden Flächen in dieser Lage vereint wieder. Die Begrenzungen sind dieselben wie bei 8b und 9b.

Preis der ganzen Serie 30 Mark.

Für die Fadenmodelle sind auch passende Stative angefertigt, die auf Wunsch mitgeliefert werden.

Stativ Nr. 1. **Dreifuss** zum Aufhängen des Modells No. 6. Mark —.50.

„ „ 2. **Gestelle aus Draht** als Untersatz für die Modelle Nr. 8a, b. und 9a, b. je Mark —.30.

Zu den wichtigsten Bestandteilen der bis jetzt herausgegebenen Modelle gehören diejenigen Serien, welche die Modelle von Flächen zweiter Ordnung enthalten. Sind letztere doch durch ihre mannigfaltigen Formen und durch die Fülle schöner geometrischer Beziehungen vorzugsweise geeignet, dem Studierenden den Nutzen und die Bedeutung des Modells als wichtiges Unterrichtsmittel nahe zu legen und ihm hiermit rascher und sicherer über die Schwierigkeiten abstracter Theorien hinweg zu helfen. Wenn nun auch die

Gips- und Fadenmodelle der III. und IV. Serie zur Demonstration in den Hörsälen völlig ausreichen, so machte sich doch das Bedürfnis geltend, Modelle kleinerer Abmessung zu thunlichst billigem Preise herzustellen, um auch dem Studierenden deren Anschaffung zu ermöglichen. Durch die Güte des Herrn Professors *H. Wiener,* dessen Anregung diese Serie ihre Entstehung verdankt, wurden aus der reichen Sammlung seines Instituts die betreffenden Modelltypen der Verlagshandlung zur Vervielfältigung freundlichst überlassen. So entstand eine Reihe von kleinen, zierlichen Gips- und Fadenmodellen, die in dieser Art allgemeinen Anklang gefunden haben.

Veröffentlicht 1898.

Serie XXIV.

Kinematische Modelle

herausgegeben

von Professor Dr. **Fr. Schilling** in Göttingen.

I. Gruppe.

Nr. 1.* Erzeugung der **Epitrochoiden** als solche mit **freiem** Centrum. Mk. 56.—.
„ 2. Erzeugung der **Epitrochoiden** als solche mit **bedecktem** Centrum. „ 67.—.
„ 3. Erzeugung der **Hypotrochoiden** als solche mit **freiem** Centrum. „ 59.—
„ 4. Erzeugung der **Hypotrochoiden** als solche mit **bedecktem** Centrum. „ 64.—.

II. Gruppe.

„ 5. Erzeugung von **Ellipsen und Strecken** . . . . Mk. 59.—.
„ 6. Erzeugung von **Kreisevolventen** . . . . „ 66.—.
„ 7. Erzeugung von **Cycloiden** . . . . „ 58.—.

III. Gruppe.

„ 8. **Gleichläufiges Zwillingskurbelgetriebe** . . . . Mk. 20.—.
„ 9.* **Gegenläufiges Zwillingskurbelgetriebe** . . . . „ 24.—.

IV. Gruppe.

„ 10.* Inversor von **Peaucellier** . . . . Mk. 22.—.
„ 11. Inversor von **Hart** . . . . „ 22.—.
„ 12. Inversor von **Sylvester-Kempe** . . . . „ 28.—.

Grösse der Modelle ca. 22×27 cm.

Preis der ganzen Serie 545 Mark.

Mit diesen Modellen hat Herr Professor Schilling den Gedanken zu verwirklichen begonnen, der auf der Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Frankfurt (1896) unter allseitiger lebhafter Zustimmung ausgesprochen wurde: es möge eine Sammlung einfacher kinematischer Modelle herausgegeben werden, welche die wichtigsten Mechanismen derart zur Anschauung bringt, dass der mathematische Grundgedanke überall deutlich hervortritt.

Die Originalmodelle der Sammlung haben der Versammlung in Düsseldorf (1898) vorgelegen und den vollen Beifall der Teilnehmer gefunden.

Der bequemen Übersicht wegen sind die Modelle in vier Gruppen geordnet.

Die vier Modelle der ersten Gruppe stellen die Erzeugung der allgemeinen cyclischen Curven durch Abrollung eines beweglichen Kreises auf einem festen Kreise dar. Je zwei einander entsprechende Modelle zeigen neben anderen Eigenschaften die bekannte doppelte Entstehungsweise der Epitrochoiden und Hypotrochoiden.

Die drei Modelle der zweiten Gruppe repräsentieren die speciellen Fälle der cyclischen Curven. Sie zeigen die Erzeugung von Ellipsen und Strecken durch Abrollung eines Kreises in einem solchen von doppeltem Radius, die Erzeugung von verschlungenen, gespitzten und gestreckten Kreisevolventen und Cycloiden durch Abrollung einer Geraden auf einem Kreise oder eines Kreises auf einer Geraden.

Die dritte Gruppe zeigt in zwei Modellen das sogenannte gleichläufige und das gegenläufige Zwillingskurbelgetriebe mit ihren Polbahnen, zwei congruenten Ellipsen oder Hyperbeln.

Die vierte Gruppe endlich veranschaulicht in drei Modellen die Inversoren von Peaucellier, Hart und Sylvester-Kempe. Durch eine einfache Einrichtung wird in jedem Apparat einer der einander zugeordneten Punkte auf einem Bogen entweder eines durch das Inversionscentrum gehenden Kreises oder eines das letztere einschliessenden Kreises geführt, so dass der zugeordnete Punkt entweder eine Strecke oder ebenfalls einen Kreisbogen beschreibt.

Eine eingehende Beschreibung der Modelle mit Abbildungen ist in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrgang 1899, Heft 4, erschienen.

Eine ausführliche Abhandlung wird beigefügt.

Veröffentlicht 1898.

Serie XXV.

Sieben Fadenmodelle der Kegel dritter Ordnung

von

Professor Dr. **H. Wiener** in Darmstadt.

A. Kegel vom Geschlechte Null.

Nr. 1.*	1. Kegel mit Rückkehrkante . . . . (von der dritten Klasse).	Mk.	18.—.
	2. Kegel mit Doppelkante (von der vierten Klasse), die		
„ 2.	a. als Selbstschnitt, ...	„	18.—.
„ 3.	b. als isolierte Doppelkante auftritt.	„	20.—.

B. Kegel vom Geschlechte Eins
(von der sechsten Klasse).

„ 4.*	1. aus einem paaren und unpaaren Mantel bestehend;	„	20.—.
	2. aus einem einzigen unpaaren Mantel bestehend,		
„ 5.	a. in Dreikantslage, ...	„	16.—.
„ 6.*	b. in Vierkantslage, ...	„	20.—.
„ 7.	c. mit drei durch eine Gerade gehenden Wendeberührebenen.	„	16.—.

Höhe der Modelle 17 cm.

Preis der ganzen Serie 128 Mark.

Eine Einteilung der ebenen Curven dritter Ordnung, wie sie der Unterscheidung der Curven zweiter Ordnung in Ellipse, Hyperbel und Parabel entspricht, hat zuerst *Newton* unternommen. Indem er die verschiedenen Gestalten ihrer Gleichung untersucht, wird er auf 72 verschiedene Curvenarten geführt, von denen er nebenbei bemerkt, dass sie sich aus fünf besonderen Curven, den „divergierenden Parabeln“ durch Projection ableiten lassen. Nach ihm griff *Möbius* die Aufgabe wieder auf; er verzichtet aber gänzlich auf eine genauere Einteilung der Curven in Arten und will nur die wichtigsten Gattungen feststellen, aus denen durch Projection

alle übrigen gewonnen werden können. Um keine einzelne vor den anderen gleichberechtigten auszuzeichnen, setzt er an die Stelle der Curven die projicierenden Kegel und unterscheidet von diesen 7 Gattungen.

Ist das Geschlecht der Curven also auch der projicierenden Kegel, gleich Null, so giebt es nur drei projectiv verschiedene Gestalten von Kegeln, während es für das Geschlecht Eins deren unendlich viele giebt. Aber unter den letzteren sind doch wesentliche Unterschiede in der Gestalt vorhanden. So kann ein solcher Kegel entweder allein aus einem unpaaren Mantel oder aus einem solchen und einem hinzutretenden paaren Mantel bestehen, und man wird bei Berücksichtigung dieses Unterschiedes zwei Gattungen von Kegeln vom Geschlechte Eins zu unterscheiden haben, die zusammen mit den drei Gattungen vom Geschlechte Null den 5 Newton'schen Parabeln entsprechen. Aber unter den einmanteligen Kegeln von Geschlechte Eins gibt es noch einen ausgezeichneten, bei dem nämlich die drei Berührebenen der Wendekanten durch eine Gerade hindurchgehen, und dieser ist ein Zwischenglied zwischen solchen, bei denen der Kegelmantel sich entweder durch drei Dreikante oder durch drei Vierkante hindurchwindet, die durch jene drei Berührebenen und die Ebene der drei Wendekanten begrenzt werden. So kommt man mit *Möbius* zu den 7 Gattungen von Kegeln, die durch die vorliegenden Fadenmodelle dargestellt werden. Diese Modelle sollen also auch hauptsächlich dem Studium der Curven dritter Ordnung dienen, insofern es diejenigen Gestalten betrifft, die durch ihr Verhalten gegen die unendlich ferne Gerade bedingt sind. Legt man irgend eine schneidende Ebene durch einen der 7 Kegel dritter Ordnung, so erhält man eine Schnittcurve, die drei unendlich ferne Punkte besitzt. Von diesen können sein:

a. alle drei getrennt, und zwar
  α. alle drei reell,
  β. einer reell und zwei conjugiert imaginär;
b. zwei zusammenfallend und einer davon getrennt,
c. alle drei in einen einzigen zusammenfallend.

Dabei kann das Zusammenfallen zweier Punkte bei b und c verschiedene Ursache haben, je nachdem die unendlich ferne Gerade die Curve berührt oder durch einen Doppelpunkt geht.

Diese Unterschiede ergeben eine gewisse Einteilung der Curven in Arten, denen eine feinere Teilung in Unterarten noch folgen kann; und je nachdem die Teilung mehr oder weniger weit verfolgt wird, erhält man auch verschiedene Anzahlen von Curvengestalten. So zählt Newton deren 72, bei denen aber (trotz seiner Einteilung in 5 Parabeln) alle 7 Kegel zur Verwendung kommen, Plücker zählt 216 Arten, Salmon unter Zugrundelegung der 5-Teilung 30 Unterarten.

Will man an den Modellen die Gestalt der Schnittcurve irgend einer gedachten Ebene erkennen, so lege man durch die Kegelmitte eine Parallelebene. Aus der Art des Schnittes der letzteren geht die Art, Zahl und Richtung der Asymptoten (reelle, imaginäre, parabolische) der Schnittcurve hervor, und daraus lässt sich die Gestalt der Curve selbst ohne weiteres absehen.

Die Kegel selbst verdienen insbesondere auch als einfache Beispiele von Kegeln unpaarer Ordnung Beachtung. Ein Strahl, der einen solchen erzeugt, kehrt dabei nicht in gleichem, sondern in umgekehrtem Sinne in die Anfangslage zurück. Bei projectiver Auffassung zerlegt ein unpaarer Kegel, der sich nicht selbst durchsetzt, den Raum nicht in zwei Gebiete, und seine Fläche dient als Beispiel einer einseitigen Fläche im Möbius'schen Sinne.

Der Anschaulichkeit halber sind die Kegel mit möglichst vielen Symmetrie-Ebenen und -Axen ausgestattet, je eine in Nr. 1 und 2, je drei in Nr. 3 bis 7.

Eine ausführliche Abhandlung wird beigefügt.

Veröffentlicht 1899.

Serie XXVI.

Hilfsmittel für den Unterricht in darstellender und projectiver Geometrie.

A. Zehn Gips-Modelle architektonischer Polyeder

von

Dr. **Guido Hauck,**
Professor an der Königl. technischen Hochschule in Berlin.

Nr. 1. **Einfaches Grabkreuz.**
„ 2.* **Gothisches Grabkreuz.**
„ 3. **Denkstein.**
„ 4. **Warttürmchen.**
„ 5.* **Gruftbau.**
Nr. 6. **Achtseitige Säule.**
„ 7. **Romanische Säule.**
„ 8.* **Brunnensäule.**
„ 9. **Achtseitiges Türmchen.**
„ 10.* **Sechsseitiges Türmchen.**

Höhe der Modelle 22–26 cm.

Einzelne Nummern 13 Mark.

Preis der ganzen Abteilung 120 Mark.

Zum Schutze der Modelle, insbesondere gegen Staub, sind passende **Glasglocken mit Holzuntersätzen** hergestellt, deren Anschaffung sich empfiehlt, da die Modelle meistens auch während der Benutzung in den Zeichensälen unter den Glocken stehen bleiben können und so erheblich geschont werden. Die Preise der Glocken nebst Untersätzen zu den einzelnen Nummern stellen sich folgendermassen:

zu Nr. 1	Mark	5,—	zu Nr. 6	Mark	2,75
„ „ 2	„	3,75	„ „ 7	„	5,—
„ „ 3	„	8,50	„ „ 8	„	2,75
„ „ 4	„	5,—	„ „ 9	„	5,—
„ „ 5	„	6,50	„ „ 10	„	3,75

Insgesamt 48 Mark.

Die unten wiedergegebene kurze Anleitung zum Gebrauch dieser Modelle wird in zwei Exemplaren beigefügt, von denen eins zum Aufhängen auf Pappe gezogen ist.

B. Acht Modelle,

von

Professor Dr. **Fr. Schilling** in Göttingen.

Nr. 11 a.* **Grosse Projectionstafel** mit zwei Hilfstafeln, 8 Stahlstäben, 4 mit Messingkugel an einem Ende, 4 an beiden Enden spitz, und 10 Korkkugeln. (Grösse 110×90 cm.) Mark 70.—.

„ 11 b. **Festes Gestell** zum Aufhängen der Tafel. Mark 16.—.

„ 12. **Kleine Projectionstafel** aus Pappe mit Schiefertafelpapier bezogen. (Grösse 52×45 cm.) Mark 3.—.

„ 13.* **Durchdringung von Pyramide und Prisma.** (Grösse 68×48×50 cm.) Mark 20.—.

„ 14. **Gerader Kreiscylinder** mit elliptischem Schnitt nebst 10 Bogen Papier, um die Abwickelung der Schnittcurve darzustellen. (Höhe 42 cm., Durchmesser 24 cm.) Mark 8.—.

„ 15. **Zwei congruente Ellipsen** mit gemeinsamer kleiner Axe, sich rechtwinklig schneidend, dem vorigen Modell entsprechend. Mark 10.—.

„ 16.* **Drei Schraubenlinien** derselben Ganghöhe mit gemeinsamer Axe. (Höhe 70 cm.) Mark 60.—.

„ 17. **Einzelne Schraubenlinie** mit 5 Windungen. (Höhe 50 cm.) Mark 5.—.

„ 18.* **Projective Erzeugung der Kegelschnitte.** (Grösse 70×52 cm.) Mark 75.—.

Nr. 1—10. Für den Anfangsunterricht in der darstellenden Geometrie besteht eine überaus wichtige und fruchtbare Übung, um das Verständnis für die Darstellung in Grund- und Aufriss zu fördern, darin, dass dem Schüler das Modell eines Körpers in die Hand gegeben und ihm die Aufgabe gestellt wird, davon in vorgeschriebener Stellung den Grundriss und Aufriss zu zeichnen. Es werden hierfür meist die elementaren stereometrischen Körper, namentlich die regulären Polyeder, verwendet. Der Bestand derselben ist aber ein recht spärlicher; auch sind sie vermöge ihrer durchgängigen Convexität zu gleichartig und zu einfach. Eine Folge hiervon ist die häufig beobachtete Erscheinung, dass Schüler, die in der theoretischen Projectionslehre Tüchtiges leisten, mitunter nicht imstande sind, die einfachsten architektonischen Grundrisse zu verstehen und aus dem Grundriss und Aufriss das räumliche Object sich zur inneren Vorstellung zu bringen. Gewiss werden Prismen, Pyramiden, Obelisken u. s. w. immer den Grundstock des Übungsstoffes bilden müssen. Aber doch erscheint die Herbeiziehung von reicher gegliederten Polyederformen für den angegebenen Zweck höchst wünschenswert. Denselben muss eine gewisse Regelmässigkeit im Aufbau zukommen; die Beschränkung auf durchgängige Convexität der Flächenwinkel muss aber aufgegeben werden.

Modelle dieser Art können leicht durch geometrische Stilisierung von architektonischen Motiven gewonnen werden. Eine Auswahl solcher enthält die vorliegende Sammlung von 10 Modellen.

Beim Aufnehmen dieser Modelle in Grund- und Aufriss wird man im allgemeinen in der Art vorgehen, dass man zuerst die geometrische Form der Grundrissfigur in freihändiger Skizzierung zu ergründen sucht und dann an der gewonnenen Skizze in Erwägung zieht, welche Abmessungen am Modell erforderlich sind, um die Figur geometrisch exact construieren zu können. Ist hierauf der Grundriss aufgezeichnet, so erfolgt die Construction des Aufrisses durch Ziehen der Grundlote und Auftragen der Höhen auf ihnen, wobei der jedesmalige Höhenunterschied zwischen zwei Punkten ermittelt wird als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Kathete die Grundrissprojection der Verbindungsstrecke der zwei Punkte und dessen Hypotenuse die am Modell abzumessende wahre Länge der Verbindungsstrecke ist.

Die sich etwa anschliessenden weiteren Übungen (wie Herstellung des Seitenrisses, eventuell des Diagonalrisses, ebener Schnitte, der Cavalierperspective, der malerischen Perspective, Schattenconstructionen u. s. w.) sind dann ohne Zuhilfenahme des Modells auszuführen, mit blosser Benutzung des Grundrisses und Aufrisses, aus welchen der Schüler lernen muss, sich die plastische Form in seiner inneren Anschauung zu vergegenwärtigen. Nur beim Eintreten von grösseren Vorstellungsschwierigkeiten mag das Modell als ultima ratio — und auch dann nur vorübergehend — zu Rate gezogen werden.

Nr. 11—18. Diese Modelle für den Unterricht in darstellender und projectiver Geometrie zeigen ein ganz anderes Gepräge, als die sonst wohl bisher erschienenen Modelle ähnlicher Art. Ihre Herausgabe war eben wesentlich durch den Umstand veranlasst, dass es an solchen in hinlänglich grossem Massstabe ausgeführten Modellen, die auch in sehr grossen Auditorien mit Vorteil benutzt werden können, bisher gänzlich fehlt. Die Modelle zeigen nicht besonders schwer vorzustellende geometrische Gebilde; aber jeder Lehrer der darstellenden Geometrie weiss, welche grosse Schwierigkeit einerseits selbst einfache Dinge dem Anfänger bei der rein sinnlichen Vorstellung bereiten, wie überaus leichter und schärfer andererseits sich die Ausdrucksweise des Vortrages gestalten lässt, wie viel einfacher sich die gewünschte geometrische Vorstellung

bei den Zuhörern erwecken lässt, wenn man Hilfsmittel zur Hand hat, an die man die Erläuterung unmittelbar anknüpfen kann. Wie viel leichter lassen sich z. B. schon die Grundvorstellungen schildern, die sich auf die Grund- und Aufrisstafeln beziehen, wenn ein geeignetes, bewegliches Tafelmodell bei der Erklärung benutzt werden kann.

Die vorliegenden Modelle dürften, ebenso wie die der ersten Abteilung dieser Serie, gerade jetzt um so gelegener kommen, wo auch an den Universitäten die darstellende Geometrie als regelmässiger Lehrgegenstand ihre Einführung findet. Im folgenden seien der Reihe nach kurz die einzelnen Modelle besprochen und ihre Anwendungsweisen erläutert.

Modell **11**a. Die grosse Projectionstafel, nach Art der Schulwandtafeln hergestellt, besteht aus zwei Teilen, welche der ersten und der zweiten Tafel des Grund- und Aufrissverfahrens entsprechend im rechten Winkel gegeneinander eingestellt werden können, und zwar mittelst selbstthätigen Einschnappens eines Hebels. Gerade diese Tafel dürfte ganz besonders gute Dienste im Unterricht leisten. Der Tafel selbst werden noch zwei kleinere Hilfstafeln beigegeben, die in die grosse leicht eingesetzt werden können. Von diesen stellt die eine die Seitenrissebene dar, die dann ebenfalls umgeklappt werden kann und überdies eine Vorrichtung trägt, um genau im rechten Winkel gegen die Grund- und Aufrisstafeln eingestellt werden zu können. Die andere Hilfstafel stellt eine allgemein gelegene Ebene dar und ist um ihre erste Spur in die erste Tafel umlegbar. Endlich gehören zu der ganzen Vorrichtung noch acht Stahlstäbe, von denen vier einerseits zur Darstellung von Punkten in Messingknöpfe endigen, während die übrigen zur Darstellung von Geraden beiderseits in Spitzen auslaufen und somit leicht in jede beliebige Lage in die Projectionstafel eingesetzt werden können. Die zweite Hilfstafel besitzt ungefähr in der Mitte noch eine Durchbohrung, um jeden der Stäbe hier einsetzen zu können. Beigegeben sind den Stäben noch mehrere durchlochte Korkkugeln, welche zur Bezeichnung von Punkten dienen sollen.

Modell **11**b. Das Gestell dient zum Aufhängen der Projectionstafel. Es bietet den Vorteil, dass man die Tafel an jeder beliebigen Stelle des Hörsales aufstellen kann. Man kann die Tafel aber auch fest an die Wand oder mit geeigneten übergreifenden Haken über andere Tafeln des Hörsales aufhängen.

Über die überaus vielseitige Benutzung dieser Projectionstafel brauchen wir kaum zu sprechen. Alle die Vorlesung einleitenden Elementaraufgaben, die sich auf die mannigfache Verknüpfung von Punkten, Geraden und Ebenen (Schnitte zwischen Geraden und Ebenen, Neigungen derselben gegen die Tafeln, Hauptlinien der Ebene, kürzesten Abstand zweier Geraden und so fort) beziehen, finden in denkbar einfachster Weise durch die geeignet zusammengestellte Projectionstafel ihre unmittelbare Veranschaulichung. Um von weiteren Aufgaben, für deren Erläuterung die Tafel sich als bequemes Hilfsmittel erweist, noch etwas zu nennen, sei z. B. an die Projectionen des Kreises in allgemeiner Lage und an die Schattenconstructionen beliebiger Körper erinnert, deren Modelle sich auf die erste Tafel aufsetzen lassen.

Modell **12.** Der grossen Projectionstafel ist noch ein kleines Modell aus Pappe hinzugefügt, welches gleichfalls die Grund- und Aufrisstafeln und ihre Umklappung in eine Ebene darstellen soll, wobei jedoch die Tafeln über ihre Schnittlinie hinaus sich erstrecken. Dies Modell findet z. B. auch sehr gute Anwendung für die Erläuterung der Affinität und centralen Collineation, d. h. für die Beziehung zweier Ebenen auf einander entweder durch Parallelstrahlen oder durch Strahlen von einem im Endlichen gelegenen Punkte aus.

Modell **13** stellt die Durchdringung eines fünfseitigen Prismas und einer dreiseitigen Pyramide dar. Ersteres ist leicht abzuheben und zeigt dann besonders deutlich die Schnittlinie beider Körper, die auch auf der Pyramide eingezeichnet ist, und den ihnen gemeinsamen Raumteil.

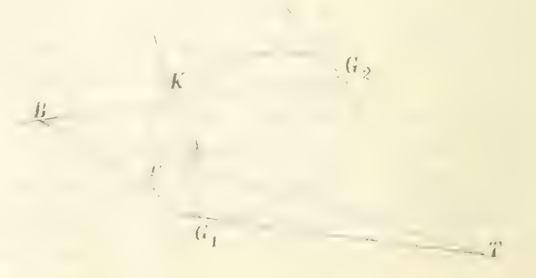
Modell **14,** ein gerader Kreiscylinder mit elliptischem Schnitt, ist so eingerichtet, dass der obere Teil gegen den unteren gedreht werden kann. Bei halber Umdrehung veranschaulicht das Modell den mathematischen Gedanken bei dem einfachen Kreuzgewölbe, zwei sich doppelt berührende gerade Kreiscylinder mit rechtwinkligen Axen. Dem Modell beigegeben sind noch zehn Bogen Papier. Wird ein solcher auf den Cylinder aufgerollt und dann längs der Schnittcurve mit einem scharfen Messer eingeschnitten, so gibt er abgenommen die Abwickelung der Schnittcurve mit mehreren Perioden, die affine Curve einer einfachen Sinuslinie. Diese einfache Methode ist wohl zuerst von Herrn Hermann Wiener in Darmstadt beim Unterricht angewandt worden.

Modell 15. Um die vollständige Schnittcurve bei dem soeben beschriebenen Kreuzgewolbe besser übersehen zu können, ist diese als Ergänzung des vorigen Modells aus starkem Aluminiumdraht für sich dargestellt. Das Modell vor die Wandtafel haltend, erkennt man bei der Drehung desselben die verschiedenen Projectionen der Schnittcurve (scheinbare Doppelpunkte), wenn man es nicht vorzieht das Modell in den Lichtkegel eines Skioptikons zu halten und so auf dessen Schirm zu projicieren.

Modell 16. Dieses zeigt drei gewöhnliche Schraubenlinien mit derselben Axe und Ganghöhe und zwar in zwei vollen Windungen. Die Schraubenlinien selbst sind aus Messingdraht, die Axe und Speichen aus vernickeltem Eisendraht sorgfältig hergestellt. Wird es vor die Wandtafel gehalten, so lassen sich sowohl die senkrecht zur Axe und Tafel ausgeführten Projectionen der verschiedenen Schraubenlinien als affine Curven derselben Sinuslinie, wie ihre schiefen Parallelprojectionen als affine Curven von Cycloiden veranschaulichen. Im letzteren Falle ist es besonders lehrreich, das Modell so anzusehen, dass die mittlere Schraubenlinie sich in der Projection als affine Curve einer Cycloide mit Spitzen darstellt, wobei dann die äussere als solche einer verschlungenen, die innere als solche einer gestreckten Cycloide dem Auge erscheint. Dass das Modell auch in manchen anderen Disciplinen, z. B. in der Theorie der Raumcurven, in der Kinematik und in der Lehre vom Nullsystem gute Verwendung findet, sei nur nebenbei bemerkt.

Modell 17. Es schien wünschenswert, noch eine einzelne Schraubenlinie für sich darzustellen, doch nun mit sehr vielen Windungen. Die Ausführung und Verwendung dieses Modelles ist analog wie beim vorigen.

Modell 18 veranschaulicht die allgemeine projective Erzeugung der Kegelschnitte, speciell einer Ellipse. Auf einem Reissbrett, dessen Zeichenblatt zunächst die ausgezogenen Linien der nebenstehenden Figur in der Grösse der Modelle zeigt, sind in den vier Punkten T, G_1, G_2, K kleine Säulen angebracht, welche den Tangenten TG_1, TG_2



und den Geraden K G_1, K G_2 entsprechend feste Stäbe aus Stahl tragen. Ausserdem sind noch aus Messing zwei weitere Stäbe G_1B und G_2A um die den Punkten G_1 und G_2 entsprechenden Zapfen drehbar, und ein dritter Stab T A B um den dem Punkt T entsprechenden Zapfen drehbar angebracht in der Anordnung, wie sie in der Figur gestrichelt eingezeichnet ist. An den Schnittpunkten A und B befinden sich zwei kleine Griffe; an diese anfassend, kann man leicht die beweglichen Stäbe drehen, deren gegenseitige Bewegung mit Hilfe von mehrfachen längs den Geraden gleitenden Prismenführungen sich von selbst regelt. An der Stelle C ist dann ein in eine Spitze auslaufender Stift angebracht, der hierbei auf der Ellipse entlang gleitet. Naturgemäss lässt sich nur ein Teil der Ellipse durch den Stift beschreiben. Bei der Construction des Modelles ist besondere Sorgfalt darauf verwandt, dass die technischen Nebenteile durchaus nicht den mathematischen Gedanken verdunkeln.

Zur mathematischen Erläuterung sei nur bemerkt, dass die Punktreihen (A) und (B) der Geraden K G_1 und K G_2 von T aus durch die Gerade T A B perspectiv auf einander bezogen, und bez. von G_2 und G_1 aus dann durch projective Strahlbüschel (G_2 A) und (G_1 B) projiciert werden, deren entsprechende Strahlen sich in C schneiden. Diese Erzeugung des Kegelschnittes lässt unmittelbar den speciellen Fall des Pascalschen Satzes erkennen, bei dem zwei Gegenseiten des Sechsecks in Tangenten ausgeartet sind, wie die Figur zeigt, in der T A B die Pascalsche Gerade ist.

Veröffentlicht 1901.

Serie XXVII.

Drei räumliche Drahtmodelle electrischer Aequipotential- und Kraftlinien

nach Professor Dr. O. Lehmann in Karlsruhe
angefertigt auf Veranlassung von
Dr. O. Wiener,
Professor an der Universität Leipzig,
nach Zeichnungen von Dr. H. Scholl.

Nr. 1. Einem elektrischen Massenpunkte entsprechend. Mark 40.—.
„ 2.* Zwei gleichnamigen elektrischen Massenpunkten entsprechend. Mark 80.—.
„ 3. Zwei ungleichnamigen elektrischen Massenpunkten entsprechend. Mark 80.—.

Höhe der Modelle 85 cm.

Preis der ganzen Serie 200 Mark.

Die beiden Curvenscharen der Modelle sind aus rot und weiss lackierten starken Messingdrähten hergestellt und werden von einem Stativ getragen, so dass sie bequem aufgestellt werden können. Sie sind durch eine handliche Vorrichtung zum Umlegen eingerichtet, was zweckmässig erschien, um sie in zwei Lagen bequem projicieren zu können.

Die Modelle stellen den Verlauf der Aequipotential- und Kraftlinien in einer Ebene dar, für den Fall, dass gegeben ist:

1) ein electrischer Massenpunkt;
2) zwei gleichnamige, gleichwertige electrische Massenpunkte;
3) zwei ungleichnamige, gleichwertige electrische Massenpunkte.

O. Lehmann hat Flächenmodelle mit darauf gezeichneten Niveau- und Kraftlinien in seinem Werke „Electricität und Licht" (Braunschweig, 1895, S. 15), sowie in der von ihm völlig umgearbeiteten 14. Aufl. von J. Müllers Grundriss der Physik

(Braunschweig, 1896, S. 484) beschrieben. Solche Modelle enthielt die Sammlung des physikalischen Instituts der Technischen Hochschule in Karlsruhe, und es entstand die Anregung, ähnliche Modelle für das Leipziger physikalische Institut anfertigen zu lassen, jedoch mit dem Unterschied, dass nicht die Flächen selbst, sondern nur das Gerippe der Niveau- und Kraftlinien durch steife Drähte dargestellt werden sollte, aus dem weiter unten ersichtlichen Grunde. Die der Construction der Modelle zu Grunde liegenden Zeichnungen wurden durch Dr. H. Scholl ausgeführt.

Die electrischen Massenpunkte bedingen in einer sie enthaltenden Ebene Potentiale, deren Werte in den drei Fällen beziehungsweise durch die Ausdrücke $\frac{\varepsilon}{r}$, $\frac{\varepsilon}{r_1} + \frac{\varepsilon}{r_2}$, $\frac{\varepsilon}{r_1} - \frac{\varepsilon}{r_2}$ dargestellt werden, wenn ε die Grösse der electrischen Masse und die r die jeweiligen Abstände von den gegebenen Massenpunkten bezeichnen. Denkt man sich diese Potentiale in jedem Punkte der Ebene senkrecht zu ihr aufgetragen, so entsteht eine Fläche, welche im ersten Falle die Form eines allseits eingedrückten Kegels hat, der in der Nähe der Mitte sehr steil, gegen aussen hin langsamer abfällt, im zweiten Falle die Form zweier kegelähnlichen Erhebungen, die in der Mitte durch einen Sattel zusammenhängen, im dritten Falle die Form einer kegelähnlichen Erhebung und einer ebensolchen Vertiefung. Denkt man sich die Ausgangsebene horizontal gestellt und schneidet jetzt die Flächen durch gleichweit abstehende Horizontalebenen, so entstehen die Niveaulinien der Modelle, welche durch weisse Drähte dargestellt sind. Sie werden überall senkrecht geschnitten von den durch rote Drähte dargestellten Falllinien, das sind Linien, deren Tangenten überall die Richtung anzeigen, welche eine auf der Fläche losgelassene Kugel fallend einschlägt, oder auch Linien, längs welcher Wasser an der Fläche hinabfliessen würde, wenn es sich langsam, ohne merkliche Beeinflussung durch die Trägheit, bewegte.

Beleuchtet man nun diese Drahtmodelle mit einem Büschel paralleler Lichtstrahlen senkrecht zu den aufgestellten Niveauflächen — für die Demonstration benutzt man am besten eine in grosser Entfernung aufgestellte, der Linsen entblösste Bogenlampe — und fängt den Schatten des Modells auf einem zu den Niveauflächen parallelen Schirme auf, so bilden sich die Niveaulinien als electrische

Aequipotentiallinien ab, die Falllinien als electrische Kraftlinien. Es tritt dadurch sehr deutlich die Analogie zwischen der Darstellung einer topographischen Fläche durch Niveau- und Falllinien mit der Darstellung eines electrischen Feldes durch die Aequipotentiale und Kraftlinien hervor. Da wo die topographische Fläche am steilsten, ein fallender Körper also die grösste Beschleunigung erfährt, liegen die Projectionen der Niveaulinien am dichtesten gedrängt, als electricche Aequipotentiallinien aufgefasst, zeigen sie durch ihr enges Aneinanderliegen die Grösse der electrischen Kraft an.

Diese kann ausserdem noch durch die Dichtigkeit der Kraftlinien erkannt werden, die in unmittelbarer Nähe der gedachten electrischen Massenpunkte unter gleichen Winkeln auslaufend angenommen wurden. Legt man die Modelle um, so dass die Lichtstrahlen parallel den Niveauflächen auffallen, so projicieren sich diese als gerade, gleichweit abstehende Linien; die Umrisslinien projicieren sich beim ersten Modell als Äste zweier gleichseitigen Hyperbeln.

Veröffentlicht 1901.

Serie XXVIII.

Sechs Modelle zur Theorie der cubischen Raumcurve

und ihrer Anwendung in der physiologischen Optik.

Auf Veranlassung von Geheimrat Professor Dr. Klein und unter Mitwirkung von Professor Dr. Fr. Schilling in Göttingen.

angefertigt von

Dr. W. Ludwig in Breslau.

Nr. 1. **Cubische Ellipse auf elliptischem Cylinder.** (Grösse 12×14×40 cm.) Mark 25.—.

„ 2.* **Cubische Hyperbel auf hyperbolischem Cylinder.** (Grösse 19×28×40 cm.) Mark 40.—.

„ 3. **Cubische parabolische Hyperbel auf parabolischem Cylinder.** (Grösse 16×16×40 cm.) Mark 25.—.

„ 4. **Cubische Parabel auf parabolischem Cylinder.** (Grösse 16×16×40 cm. Mark 25.—.

„ 5.* **Tangentenfläche der cubischen Ellipse.** (Grösse 36×40×40 cm.) Mark 26.—.

„ 6.* **Horopter.** (Grösse 20×23×47 cm.) Mark 25.—.

Preis der ganzen Serie 160 Mark.

Die cubische Raumcurve verdient eine ganz besondere Berücksichtigung bei der Auswahl der Beispiele, die dem Anfänger die allgemeine Theorie der Raumcurven näher bringen sollen; denn sie zeigt die Eigenschaften der doppelt gekrümmten Curven in überaus einfacher Weise und besitzt dabei so leicht zu überblickende Formen, dass jeder, der sie einmal gesehen hat, sie ohne Mühe sich wieder deutlich vorstellen kann. Ausserdem hat sie aber auch ein weitergehendes Interesse wegen ihrer schönen projectiven Eigenschaften und wegen ihres Auftretens in der physiologischen Optik.

Es werden daher zweifellos diese neuen für den Unterricht besonders geeigneten Modelle der cubischen Raumcurven mit

Freuden begrüsst werden. Diese Modelle verdanken ihre Entstehung der Anregung des Geheimrats *Klein* in seinem im W.-S. 1900/01 an der Universität Göttingen abgehaltenen Seminar.

Ganz neu ist vor allem die von Professor *Schilling* veranlasste Art der Ausführung der ersten vier Modelle. Während bisher Raumcurven nur aus Draht gebogen oder auf den Oberflächen von Körpern aus Holz, Gips oder anderer undurchsichtiger Masse aufgezeichnet wurden, sind hier die Cylinder, welche die Curven tragen, aus durchsichtigem Celluloid angefertigt und gestatten es daher, in jeder Stellung der Modelle den ganzen Verlauf der Curve auf dem Cylinder mit einem Blick zu erkennen. Die Modelle lassen sich infolgedessen gut projicieren und können dann auch zur Erläuterung mancher Eigenschaften der ebenen Curven dienen, wie z. B. zur Veranschaulichung des Überganges vom eigentlichen Doppelpunkt zum Rückkehrpunkt und zum isolierten Doppelpunkt. Überhaupt verspricht diese neue Darstellungsart auch für andere Curven und Flächen sich als recht brauchbar zu erweisen.

Nr. 1—4 veranschaulichen die 4 Typen die man bei der cubischen Raumcurve je nach ihrem Verhalten zur unendlich fernen Ebene unterscheidet, nämlich:

1) Die cubische Ellipse mit einem reellen unendlich fernen Punkt und einer reellen Asymptote; mit dieser zusammen liegt sie auf einem elliptischen Cylinder, wie Modell 1 zeigt.

2) Die cubische Hyperbel mit drei getrennten reellen unendlich fernen Punkten und drei reellen Asymptoten; sie liegt mit jeder der letzteren zusammen auf einem hyperbolischen Cylinder, in dessen Asymptotenebenen sich jedesmal ihre beiden anderen Asymptoten befinden. Die Curve ist in Modell 2 auf dem einen dieser drei Cylinder dargestellt.

3) Die cubische parabolische Hyperbel, welche die unendlich ferne Ebene in einem reellen Punkt berührt und in einem zweiten schneidet, der die einzige Asymptote bedingt. Die Curve liegt daher einmal mit letzterer zusammen auf einem parabolischen Cylinder und ist solcherweise im Modell 3 veranschaulicht, sodann auf einem hyperbolischen Cylinder, den man auch leicht am Modell erkennt.

4) Die cubische Parabel, welche mit der unendlich fernen Ebene drei einander unendlich nahe Punkte gemeinsam, sie

also zur Schmiegungsebene hat. Durch die Curve geht nur ein parabolischer Cylinder, den das Modell 4 mitsamt der Curve gibt.

Nr. 5 zeigt die abwickelbare Fläche der Tangenten der im ersten Modell dargestellten cubischen Ellipse, begrenzt durch ihre Schnittcurven mit vier passend gewählten Ebenen. Die Rückkehrcurve dieser Fläche ist eben unsere cubische Ellipse, und der weiss-rote Faden des Modells deutet ihre Asymptote an.

Nr. 6 endlich dient zur Veranschaulichung der Bedeutung der cubischen Raumcurve in der physiologischen Optik. Blickt man mit beiden Augen nach einem Punkte im Raume hin, so vereinigen sich die auf beiden Netzhäuten entworfenen Bilder dieses Punktes zu einer einzigen Empfindung; man sieht den Punkt einfach. Von den übrigen Punkten des Raumes werden bei dieser bestimmten Augenstellung nur gewisse Punkte einfach gesehen, die anderen aber doppelt, eine Thatsache, deren wir uns allerdings für gewöhnlich nicht bewusst werden. Den Ort der bei einer bestimmten Augenstellung einfach gesehenen Punkte des Raumes nun nennt man den zu dieser Augenstellung gehörigen Horopter; derselbe ist eine cubische Raumcurve und zwar eine symmetrische cubische Ellipse, die auf einem Kreiscylinder liegt.

Diese geschilderten Verhältnisse werden durch unser Modell vollständig veranschaulicht, das die verkleinerte Darstellung eines wirklichen Falles mit allen Einzelheiten in leicht zu übersehender Ausführung wiedergibt; wir erkennen die beiden Augen, den fixierten Raumpunkt, die Blicklinien, die Median- und Frontalebenen des Kopfes u. s. w., vor allem natürlich die Horoptercurve selbst mit ihrer Asymptote und Symmetrieaxe.

Die beigegebene Abhandlung entwickelt im ersten Teil die Hauptsätze der Theorie der cubischen Raumcurve, um auf Grund derselben im zweiten Teil ausführlich auf die mathematische Theorie der Horoptercurve einzugehen.

Veröffentlicht 1902.

Serie XXIX.

Drei Modelle zur Kreiseltheorie.

Unter Mitwirkung von Professor Dr. Fr. Schilling in Göttingen

herausgegeben von

Dr. Hermann Grassmann,

Privatdocenten an der Universität Halle.

No. 1. **Die epicycloidische Drehung eines kraftfreien starren Körpers.** (Grösse 20×20×21 cm.) Mark 100.—.

„ 2. **Die pericycloidische Drehung eines kraftfreien starren Körpers.** (Grösse 20×31×34 cm.) Mark 100.—.

„ 3. **Die Uebergangsform zwischen epicycloidischer und pericycloidischer Drehung eines kraftfreien starren Körpers.** (Grösse 20×31×34 cm.) Mark 75.—.

Preis der ganzen Serie 265 Mark.

Eine jede Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt lässt sich, wie *Poinsot* gezeigt hat, auffassen als ein Fortrollen einer mit dem Körper fest verbundenen Kegelfläche auf einer zweiten Kegelfläche, die im Raume festliegt. Die erste Kegelfläche heisst der Polhodiekegel, die zweite der Herpolhodiekegel. Beide Flächen haben ihren Scheitel im Drehpunkte des Körpers, und ihre Berührungslinie bildet für jeden Augenblick die instantane Drehaxe des Körpers. Ist es gelungen, bei einem gegebenen Rotationsproblem die beiden Kegel zu constuieren, und kennt man noch für irgend einen Augenblick die Lage des ersten Kegels gegen den zweiten, so kann man die Bewegung des Körpers ihrem räumlichen Gange nach vollkommen getreu nachahmen, indem man von jener Lage der beiden Kegel ausgehend den Polhodiekegel auf dem Herpolhodiekegel abrollen lässt.

Um sich indes auch ein Bild von dem zeitlichen Verlaufe der Bewegung machen zu können, trägt man noch vom Drehpunkte

aus auf jeder Erzeugenden der beiden Kegel eine Strecke ab, welche durch ihre Länge die Winkelgeschwindigkeit veranschaulicht, die der Körper bei der Drehung um diese Erzeugende besitzt, und zugleich durch ihren Sinn den Drehungssinn der Bewegung ausdrückt. Auf diese Weise erhält man auf jeder Erzeugenden der beiden Kegel einen Punkt, den sogenannten Drehpol dieser Erzeugenden, und als geometrischen Ort aller Drehpole auf dem Polhodiekegel die „Polhodiecurve“ oder „Polhodie“, als geometrischen Ort der Drehpole auf dem Herpolhodiekegel die „Herpolhodiecurve“ oder „Herpolhodie“. Beide Curven — man nennt sie auch die beiden Polwege — wickeln sich dann ebenfalls bei der Bewegung des starren Körpers auf einander ab. Regelt man dabei zugleich diese Abwickelung in der Weise, dass ihre Winkelgeschwindigkeit in jedem Augenblick der Länge des Leitstrahls der beiden Polwege an der Berührungsstelle entspricht, so wird die Rotationsbewegung des Körpers auch ihrem zeitlichen Verlaufe nach dargestellt.

Bei dem kraftfreien starren Körper bevorzugt man indes gewöhnlich ein anderes, ebenfalls von *Poinsot* herrührendes Verfahren. In diesem Falle kann nämlich die Bewegung auch dadurch erhalten werden, dass man ein mit dem Körper fest verbundenes Ellipsoid — das Ellipsoid der lebendigen Kraft des Körpers — unter Festhaltung seines Mittelpunktes auf einer im Raume festen Ebene rollen lässt. Dabei ist dann zugleich die Curve der Berührungspunkte auf dem Ellipsoid die Polhodiecurve und die Curve der Berührungspunkte auf der festen Ebene die Herpolhodiecurve; diese Ebene kann also auch als die Herpolhodieebene bezeichnet werden.

Es ist aber von Interesse, auch bei dem kraftfreien starren Körper auf das Abrollen des Polhodiekegels auf dem Herpolhodiekegel zurückzugreifen, einmal, weil bei dieser Darstellung gewisse Unterschiede in den vorkommenden Bewegungsformen schärfer hervortreten, und zweitens, weil so die Vergleichung zwischen der kraftfreien Bewegung und der Bewegung eines von Kräften ergriffenen Körpers erleichtert wird. Dazu kommt noch, dass der Polhodiekegel bei der Bewegung eines kraftfreien starren Körpers eine besonders einfache Gestalt hat, nämlich von der zweiten Ordnung ist und also leicht modelliert werden kann. Der Herpolhodiekegel freilich ist viel verwickelter, aber auf seine

Modellierung kann man verzichten, wenn man den Polhodiekegel längs der Polhodiecurve abschneidet und dann den Kegel mit seiner Randcurve unter Ausschluss des Gleitens auf der Herpolhodieebene abrollen lässt. Dieses Verfahren ist bei den drei Modellen zu Grunde gelegt.

Dabei ergeben sich drei verschiedene Bewegungsformen.

Modell 1. Wenn nämlich der Polhodiekegel die Axe des kleinsten Trägheitsmomentes umschliesst, erfolgt sein Abrollen auf dem Herpolhodiekegel epicycloidisch, das heisst, die beiden Kegel kehren sich längs ihrer Berührunglinie dauernd ihre convexe Seite zu.

Modell 2. Wenn der Polhodiekegel die Axe des grössten Trägheitsmomentes umschliesst, so ist sein Abrollen pericycloidisch, das heisst, er umschliesst auch den Herpolhodiekegel längs seiner Berührungslinie mit ihm.

Modell 3. Der dritte Fall ist der Übergangsfall, in welchem der Polhodiekegel in ein (reelles) Ebenenpaar ausgeartet ist.

Das beschriebene Verfahren bietet noch den Vorteil, dass sich mittelst der Modelle die Herpolhodiecurve leicht auf einem Papierblatt verzeichnen lässt, so dass die Modelle also nicht nur gestatten, die Bewegung des kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt nachzuahmen, sondern zugleich als Herpolhodiezirkel dienen können. Befestigt man nämlich ein Papierblatt mit einem Stück aufgelegten Blaupapiers auf der Fussplatte der Modelle und lässt den Polhodiekegel ohne Anwendung von Druck unter gelegentlicher sanfter Nachhülfe durch die Hand auf seiner Unterlage abrollen, so ruft der Kegel durch sein blosses Gewicht die Herpolhodiecurve mit hinreichender Deutlichkeit auf dem Papierblatt hervor.

Näheres bietet eine ausführliche Abhandlung, die den Modellen beiliegt.

Veröffentlicht 1902.

Zweiter Teil.

Anordnung der Modelle

nach

ihrer sachlichen Zusammengehörigkeit.

Zweiter Teil.

Erklärung der nachfolgend gebrauchten Abkürzungen.

1. Die der laufenden Nummer in Klammern beigefügten Zahlen geben die Serie und Nummer aus dem ersten Teil des Katalogs an. Die Klammer am Schluss enthält die Grösse des Modells in cm.
2. Das Zeichen ^{0} an der laufenden Nummer bedeutet, dass das Modell nicht einzeln abgegeben wird, sondern nur mit den anderen Modellen derselben Serie oder Gruppe zusammen.
3. Die Buchstaben (B), (D), (K), (S), (W), (Sg) bedeuten: hergestellt unter Leitung oder auf Anregung von Prof. Brill, jetzt in Tübingen, Prof. Dyck in München, Prof. Klein, jetzt in Göttingen, Prof. Schwarz, jetzt in Berlin, † Geh. Hofrat Wiener in Karlsruhe, Prof. Dr. Schilling in Göttingen.
4. Die Modelle sind, wo nichts anderes angegeben ist, aus Gips angefertigt.

I. Flächen zweiter Ordnung.

a) Ellipsoide.

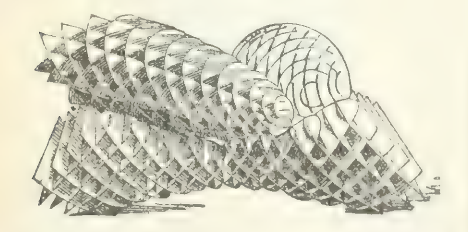
1. (XXIII, 1 a.) **Dreiaxiges Ellipsoid** mit den drei Ellipsen der drei Hauptschnitte und einer Anzahl ebener Schnitte, deren Ebenen auf der grössten Axe senkrecht stehen. (10 × 8 × 6 cm.) . . . Mk. 1.50.

2. (III, 1.) **Dasselbe** mit Angabe der Hauptschnitte: Axenverhältn. $\sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{1}$, grosse Halbaxe 5 cm. (B). (10 × 6 cm.) Mk. 1.40.

3. (III, 3.) **Dasselbe;** grosse Halbaxe 9 cm. (B). (18 × 11 cm.) . . . Mk. 1.90.

4. (X, 13.) **Dasselbe;** Axenverhältniss 3:2:1, grosse Halbaxe 17 cm. (B). (17×6 cm.) Mk. 1.20.

5. (X, 3.) **Dasselbe,** längs eines Kreisschnittes in 2 Teile zerlegbar, (B). (13×7 cm.) . . . . Mk. 4.—.



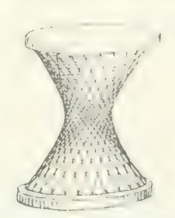
6^0. (Cart.-S., 1.) **Dreiaxiges Ellipsoid** aus 22 kreisförmigen Cartonscheiben zusammengefügt. Dieses mittelst Druck veränderliche Modell stellt bei jeder Lage der Scheiben ein Ellipsoid dar. Construiert nach Angabe von Prof. Dr. *A. Brill.*

(Diese Bemerkungen gelten für alle Cartonmodelle; Erläuterung hierzu von dem Urheber wird denselben beigegeben.)

7^0. (Cart.-S., 2.) **Dasselbe,** anderer Construction, gebildet aus 30 Kreisen.

Modelle von Ellipsoiden mit Krümmungslinien und geodätischen Linien sind in den Abschnitten VII, b u. d unter Nr. 158—160 u. 193—199 aufgeführt.

b) Hyperboloide.

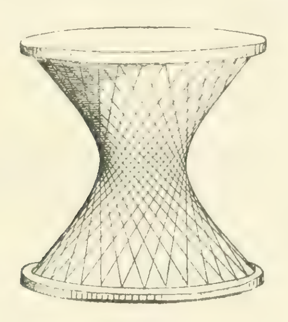


8. (XXIII, 2.) **Einschaliges Hyperboloid** mit Geraden der beiden Scharen von Erzeugenden. Die Innenwandung des Modells enthält den Asymptotenkegel mit den beiden Hauptschnitten. (Höhe 12 cm.) Mk. 2.20.

9. (XXIII, 6.) **Fadenmodell eines veränderlichen einschaligen Umdreh-Hyperboloids** mit zwei Scharen von Erzeugenden. Dadurch,

dass die Schnittpunkte beider Scharen von Erzeugenden mit dem einen Begrenzungskreis festgehalten werden, während in dem anderen die Schnittpunkte der einen Schar gegen die der zweiten Schar gedreht werden, ändert das Hyperboloid seine Gestalt zwischen Cylinder und Kegel als Grenzlagen. Mk. 2.80.

10. (III, 5.) **Einschaliges Hyperboloid** mit Angabe der Hauptschnitte. Die Höhlung des Gipsmodells hat die Gestalt des zugehörigen Asymptotenkegels (Nr. 35). Grosse Halbaxe der Kehlellipse 4 cm. (B). (23 × 14 cm.) Mk. 8.20.

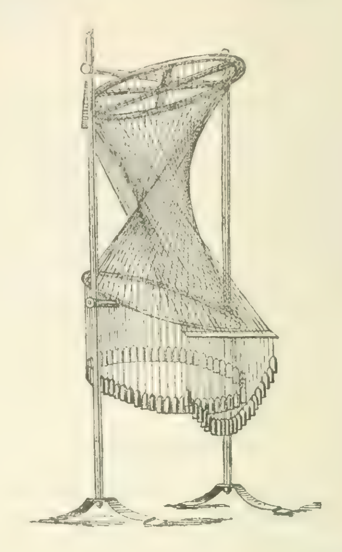


11. (III, 6.) **Dasselbe** mit den beiden Scharen der Erzeugenden (B) (23×14 cm.) Mk. 13.60.

12. (XVI, 4.) **Dasselbe,** confokal zu dem durch Nr. 160 dargestellten Ellipsoid; geht durch eine der auf dem Modelle dieses Ellipsoids zur Anschauung gebrachten Krümmungslinien hindurch. Von jeder der beiden Scharen der geradlinigen Erzeugenden sind 32 Individuen zur Anschauung gebracht. Von stud. math. Haussner in Göttingen (S). (Höhe 21 cm.) Mk. 13 —.

13⁰. (Cart.-S., 3.) **Einschaliges Hyperboloid** aus kreisförmigen Cartonscheiben zusammengefügt. Dieses bei Zug und Druck veränderliche Modell stellt für jede Lage der Scheiben ein Hyperboloid dar. Vergl. Nr. 6 (B).

14. (IV, 1.) **Einschaliges Hyperboloid,** unveränderliches Fadenmodell. Es zeigt beide Systeme von Erzeugenden nebst dem Asymptotenkegel; jedes System wird durch 64 Fäden repräsentiert. Axenverhältnis der Kehlellipse 21 : 13. (B) (14×24 cm.) Mk. 30.—.



15. (IV, 2.) Veränderliches **Fadenmodell zur Darstellung des einschaligen Hyperboloids** aus seinen Erzeugenden.

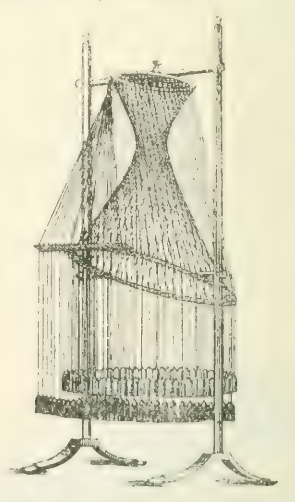


Abbildung zu Nr. 16. (IV, 3.)

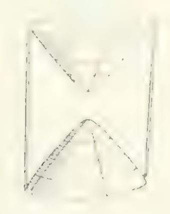
Stellt man die Leitkreise parallel und dreht den einen, so durchläuft das Modell eine Reihe von Hyperboloid-Formen vom

Cylinder bis zum Kegel als Grenzfall. Bei horizontaler Lage der Leitkreise sind es Umdrehungshyperboloide, bei geneigter dreiaxige.

Wenn man die Ebenen der Leitkreise gegeneinander neigt, so entsteht eine windschiefe Fläche 4. Ordnung.

Diejenige Linienfläche, welche die an dem Modell angegebenen Kreistangenten zu Leitlinien hat, ist ein Paraboloid, das mit der durch die Leitkreise dargestellten Fläche zwei consecutive Erzeugende gemeinsam hat (vergl. Salmon-Fiedler, Raumgeometrie, 2. Teil, Art. 206). Beschreibung im 1. Teil, IV. Serie Nr. 2. (B). (22×55 cm.) Mk. 70.—.

16. (IV, 3.) **Wie vorstehend,** nur sind die Leitkreise ungleich, die beiden Scharen der Erzeugenden durch Fäden dargestellt, die beiden Grenzlagen Kegel. Beschreibg. Teil I. Serie IV. Nr. 3 (B). (22,5×50 cm.) Mk. 75.—.



17. (XXIII, 3.) **Zweischaliges Hyperboloid** mit den Hauptschnitten und mit einer Schar paralleler ebener Schnitte, deren Ebenen auf der reellen Axe senkrecht stehen. Die beiden Schalen der Fläche sind durch Stäbchen in der richtigen Entfernung mit einander verbunden. Höhe 12 cm. Mk. 2.20.

18. (III, 8.) **Zweischaliges Hyperboloid** mit den Hauptschnitten. Den zugehörigen Asymptotenkegel zeigt Nr. 35. Reelle Hauptaxe 0,93 cm. (B). (13×23 cm.) . Mk. 13.60.

19. (XVI, 5.) **Zweischaliges Hyperboloid** mit den Hauptschnitten. Confocal zu dem durch Nr. 160 (XVI, 1.) dargestellten Ellipsoid und zu dem durch Nr. 12 (XVI, 4.) dargestellten einschaligen Hyperboloid; es geht durch eine der auf dem Ellipsoidmodelle zur Anschauung gebrachten Krümmungslinien hindurch. Von stud. math. Haussner in Göttingen (S). . . . . . Mk. 16.—.

20. (XVI, 8.) **Vereinigung eines einschaligen Hyperboloids mit einem confocalen zweischaligen Hyperboloid**; Durchdringung der Modelle Nr. 12 (XVI, 4.) u. Nr. 19 (XVI, 5.). Von Haussner in Göttingen (S). Mk. 18.—.

21⁰. (Cart.-S. 4.) **Zweischaliges Hyperboloid** aus Cartonscheiben, beweglich; jede Hälfte aus 24 Kreisen gebildet. (Lieferung beider Schalen nur auf besonderen Wunsch.) Vergl. Nr. 6 (B).

NB. Modelle von Hyperboloiden mit Krümmungslinien sind in der Abteilung VII, b. unter Nr. 166 u. 168 aufgeführt.

c) Paraboloide.

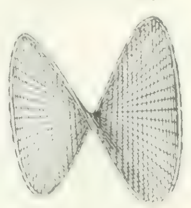
22. (XXIII, 4.) **Elliptisches Paraboloid** mit den Hauptschnitten und einer Schar von ebenen Schnitten, deren Ebenen zur Paraboloidaxe senkrecht stehen. Mk. 1.80.

23. (III, 10.) **Elliptisches Paraboloid** mit den Hauptschnitten; Halbaxen der Grundellipse 9,5 und 6 cm. (B). (6×20 cm.) Mk. 2.80.

24. (III, 2.) **Dasselbe** mit Schnitten parallel zur Berührungsebene im Scheitel (B). (6×20 cm.) . . . . Mk. 3.80.

25⁰. (Cart.-S. 5.) **Elliptisches Paraboloid** aus Cartonscheiben, beweglich, 28 Kreise. s. Nr. 6 (B).

26. (XXIII, 5.) **Hyperbolisches Paraboloid** mit den Hauptschnitten und einer Schar von ebenen Schnitten, deren Ebenen zur Paraboloidaxe senkrecht stehen. . Mk. 1.80.



Nr. 8 a.

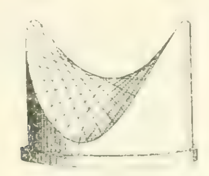
27. 28. (XXIII, 8 a u. b.) **Rechtwinkliges hyperbolisches Paraboloid.** Fadenmodell. Das Modell der Fläche ist durch die Raum-

curve vierter Ordnung begrenzt, in der sie von einem Umdrehcylinder mit gleicher Axe getroffen wird, und zeigt die beiden Scharen von Erzeugenden. Zwei Ausführungen:

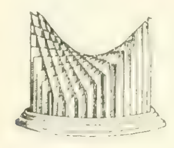
a. 13×12 cm. b. 7½×15 cm. je Mk. 2.—.

29. (III, 13.) **Hyperbolisches Paraboloid** (gleichseitig) mit den Hauptschnitten. Durchmesser des Begrenzungscylinders 14 cm. (B). (15×13 cm.) . . . . Mk. 3.80.

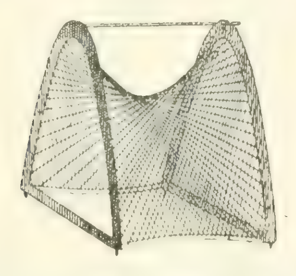
30. (III, 14.) **Dasselbe mit Horizontalschnitten** (gleichseitigen Hyperbeln) (B). (15×13 cm.) . . . . Mk. 6.80.



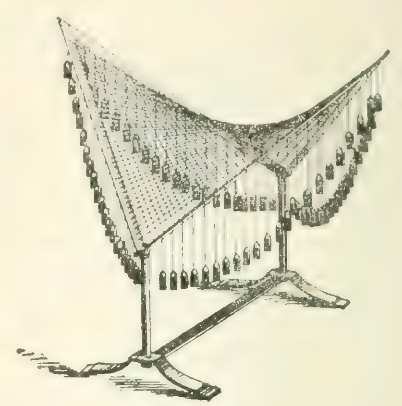
31. (III, 15.) **Dasselbe** mit den beiden Scharen von geradlinigen Erzeugenden (B). (15×13 cm.) . . . . . . Mk. 5.60.



32⁰. (Cart.-S., 6.) **Hyperbolisches Paraboloid,** bewegliches Cartonmodell, gebildet aus 26 geradlinig begrenzten Schnitten. s. Nr. 6 (B).



33. (IV, 4.) **Hyperbolisches Paraboloid,** unveränderliches Fadenmodell. Die Seidenfäden stellen die geradlinigen Erzeugenden der beiden Scharen dar. Beschreibung Teil I, Serie IV, Nr. 4. (B). (18×30 cm.) Mk. 44.—.



34. (IV, 5.) **Dasselbe,** durch Seidenfäden in einem windschiefen Viereck dargestellt, dessen Seiten paarweise beweglich sind. Das Modell durchläuft alle Paraboloidformen von einer Ebene bis zur Doppelebene mit einer Grenzparabel. Beschreibung Teil I, Serie IV, Nr. 5 (B). . . . . Mk. 70.—.

NB. Modelle von Paraboloiden mit Krümmungslinien sind in der Abteilung VII, b unter Nr. 169 u. 170 aufgeführt.

d) Kegel und Cylinder.

35. (III, 17.) **Elliptischer Kegel;** Halbaxen der Grundellipse 10,4 und 5,4 cm., Höhe 11,5 cm. Dieser Kegel ist Asymptotenkegel sowohl zum einschaligen Hyperboloid Nr. 10, wie zum zweischaligen Nr. 18 (B). (23×13 cm.) . . . . Mk. 3.80.

36. (VI, 5.) **Kreiskegel** mit ebenen Schnitten in einer Ellipse, Hyperbel und Parabel. Nach diesen Schnitten zerlegbar. (B). (32×19 cm.) . . . . Mk. 22.—.

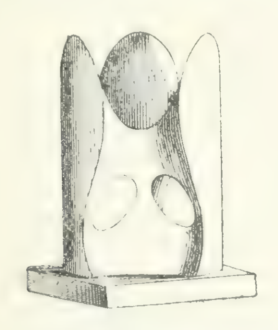
37⁰. (Cart.-S., 7.) **Kegel,** bewegliches Cartonmodell, gebildet aus 26 Kreisen. Vergl. Nr. 6 (B).

NB. Hierher gehört auch der gerade Kreiscylinder mit elliptischem Schnitt, Nr. 242 (XXVI, 14.).

II. Algebraische Flächen dritter Ordnung.

a) Nichtgeradlinige Flächen 3. Ordnung.

Diese Serie nach Prof. Dr. C. Rodenberg umfasst alle wesentlichen Typen in dem Sinn, dass aus den modellierten durch leicht zu übersehende Gestaltsänderungen alle Formen von Flächen 3. Ord. ableitbar sind. Insbesondere bietet sie für jede Art von singulären Punkten, die auf diesen Flächen vorkommen können, ein charakteristisches Beispiel. Vergl. Rodenberg's Aufsatz: „Zur Classification der Flächen 3. Ord.", Math. Annalen Bd. XIV. pag. 46 ff. Der Serie ist eine von dem Urheber verfasste Abhandlung beigegeben.



38⁰. (VII, 1.) Die **Diagonalfläche** mit 27 reellen Geraden (Bezeichnung von Clebsch, s. Salmon-Fiedler, Analyt. Geom. d. R. II. Art. 289) kann als Repräsentant der allgemeinen F_3 mit 27 reellen Geraden angesehen werden. Zwar sind von den geradlinigen Dreiecken, welche die allgemeine Fläche enthält, auf dieser Fläche 10 in Punkte zusammengeschrumpft. Hiermit zugleich sind die diesen Dreiecken einbeschriebenen 10 Ovale der „parabolischen" Curve (derjenigen Curve auf der Fläche, welche die Partien positiver Krümmung von denen negativer trennt) auf Punkte (Ovalpunkte) reduciert. — Aber mit Hilfe eines Deformationsprocesses, dem eine Constanten-Aenderung der Flächengleichung parallel läuft, lässt sich aus der Diagonalfläche die (nicht so übersichtlich darstellbare) allgemeine Fläche leicht ableiten.

Solche Deformationsprocesse sind es überhaupt, die nicht nur von den hier vorliegenden Haupttypen zu allen möglichen Formen von Flächen dritter Ordnung hinführen, sondern auch den Zusammenhang zwischen den einzelnen Typen der Serie herstellen.

Die 15 roten Geraden besitzen je zwei reelle Asymptotenpunkte, d. h. unter den Kegelschnitten, nach welchen alle durch eine solche hindurchgehenden Ebenen die Fläche schneiden, befinden sich 2 reelle, diese Gerade in den vorhin genannten Punkten berührende. Die 12 weissen Geraden bilden eine Doppelsechs, auf ihnen sind die Asymptotenpunkte imaginär. Mit Ausnahme der Ovalpunkte und der erwähnten Asymptotenpunkte ist die ganze Fläche negativ gekrümmt. (15×24 cm.)

39⁰. (VII, 2.) **Fläche mit 4 reellen conischen Knotenpunkten** C_2*). Man erhält dieselbe aus der Diagonalfläche durch Zusammenziehen der 4 Hälse. Von den 27 Geraden sind 4 . 6 in die 6 Kanten des aus den Knoten gebildeten Tetraeders zusammengerückt.

Beseitigt man einen Teil der Knoten durch Abschnüren, während man die anderen wieder in Hälse verwandelt, so erhält man einen der Flächentypen mit weniger als 27 Geraden. Beim Abschnüren z. B. eines Knotens werden 4 . 3 = 12 Gerade imaginär, man hat also den Typus einer Fläche mit nur 15 reellen Geraden u. s. f.

In die 6 roten Verbindungsstrahlen je zweier Knoten (Knotenstrahlen) sind

*) Die Buchstaben C, B, U bedeuten conische, biplanare, uniplanare Knoten; der angehängte Zeiger gibt die Anzahl der Einheiten an, um welche die Klasse durch die betreffende Singularität erniedrigt wird.

je 4 Gerade hinein gefallen; die 3 weissen Geraden dagegen sind einfach (unär). Der durch die 4 Eckpunkte bestimmte tetraederförmige Flächenteil liegt ganz im Endlichen und ist positiv gekrümmt. (13×15 cm.)

40⁰. 41⁰. 42⁰. 43⁰. (VII, 3, 4, 5, 6.) **Sämtlich collinear verwandt der Fläche Nr. 39.** Je nachdem man zur Gegenebene (Ebene, die bei der Collineation zur unendlich fernen Ebene gemacht wird) eine Ebene wählt, welche den tetraederförmigen Teil nicht trifft und die Fläche nach einer Curve dritter Ordnung mit Oval schneidet, oder von diesem Teil eine Kuppe abtrennt, oder einen Knoten des tetraederförmigen Teils von den 3 übrigen, oder endlich 2 Knoten desselben von den 2 übrigen abschneidet, erhält man der Reihe nach aus Nr. 39 die Flächen Nr. 40, 41, 42, 43.

In den drei ersten Fällen wurde ausserdem die Gegenebene horizontal gewählt, im letzten durch eine der unären Geraden (s. Nr. 39) gelegt, so dass beim Modell Nr. 43 eine dieser 3 Geraden im Unendlichen liegt. Der tetraederförmige Teil erstreckt sich bei allen, mit Ausnahme von Nr. 40, ins Unendliche und ist immer positiv gekrümmt. (13×15 cm.)

44⁰. (VII, 7.) **Fläche mit 3 conischen Knotenpunkten** C_2. Sie ist aus Nr. 39 direct nicht ableitbar, aber entsteht aus der Diagonalfläche durch Zusammenziehen der 3 unteren ellipsenförmigen Oeffnungen zu Knoten.

Die 3 weissen Geraden sind daher unär und besitzen reelle Asymptotenpunkte, in die blauen sind 2, in die roten (Knotenstrahlen) 4 Gerade hinein gefallen. Die parabolische Curve besteht, abgesehen von den 3 als Teile derselben doppelt zählenden Knotenstrahlen, aus einer Curve sechster Ordnung mit 3 Doppelpunkten in den Knoten, deren Tangenten daselbst die blau gezeichneten Geraden sind. (11×15 cm.)

45⁰. (VII, 8.) **Dieselbe Fläche,** aber von der anderen Flächenseite betrachtet (der andere Raumteil ausgefüllt).

Sie veranschaulicht die Bildung des U_6 von Nr. 53 aus 3 C_2. (11×15 cm.)

46⁰. (VII, 9.) **Fläche mit 3 reellen biplanaren Knoten** B_3, von denen jeder die Klasse um 3 erniedrigt, und für welche sämtlich die Tangentialebenenpaare reell sind.

Die 3 verschiedenen Hauptebenen gehen durch je 2 der 3 Knotenstrahlen, in welche je 4 Gerade hineingefallen sind, und osculieren die Fläche längs derselben. Die Fläche ist durchaus positiv gekrümmt mit Ausnahme der Knotenstrahlen, welche, jeder als Teil der parabolischen Curve vierfach zählend, die parabolische Curve repräsentieren. (11×15 cm.)

47⁰. (VII, 10.) **Fläche mit einem biplanaren Knoten** B_3, dessen 2 Tangentialebenen (auch Hauptebenen genannt) reell sind und der die Klasse um 3 erniedrigt.

Ausser den 6 durch den B_3 gehenden, dreifach zählenden Geraden (rot) existieren noch 9 unäre (s. oben) Gerade (weiss), wovon 5 reelle, 4 imaginäre Asymptotenpunkte besitzen. Die parabolische Curve besteht aus einem paaren Zug mit 4 Schleifen und 2 Ovalen. B_3 ist ein achtfacher Punkt derselben, es gehen aber nur 4 reelle Aeste durch ihn hindurch, welche zu je zweien die beiden Hauptebenen, nicht aber die Knotenstrahlen berühren, die in denselben liegen. Die Fläche veranschaulicht die Entstehung des U_6 aus dem B_3 durch Vereinigung seiner Ebenen. (10×15 cm.)

48⁰. (VII, 11.) **Fläche mit einem biplanaren Knoten** B_3, dessen Hauptebenen conjugiert imaginär sind.

Die parabolische Curve, welche im Allgemeinen bei Flächen mit einem solchen Knoten eine aus 3 reellen Ovalen bestehende Curve 12. Ordnung mit einem isolierten achtfachen Punkt im Knoten ist, degeneriert hier in eine ebene Curve dritter Ordnung und eine Raumcurve neunter Ordnung. Die Fläche enthält nur noch 3 reelle unäre Gerade mit reellen Asymptotenpunkten. (12×15 cm.)

49⁰. (VII, 12.) **Fläche mit einem biplanaren**, die Klasse um 4 erniedrigenden **Knoten** B_4, mit **reellem** Hauptebenenpaar und ausserdem noch 2 reellen conischen Knoten C_2.

Diejenigen beiden grünen Geraden, welche B_4 mit je einem der C_2 verbinden, zählen achtfach; die dritte grüne Gerade, in der sich die Hauptebenen von B_4 schneiden, sechsfach; der rote Knotenstrahl vierfach; die weisse Gerade ist unär und enthält 2 reelle Asymptotenpunkte. Der zwischen den 3 Knoten gelegene Flächenteil ist (mit Ausnahme von Punkten parabolischer Krümmung) positiv gekrümmt. (13×15 cm.)

50⁰. (VII, 13.) **Fläche mit einem biplanaren**, die Klasse um 4 erniedrigenden **Knoten** B_4 mit **imaginärem** Hauptebenenpaar und ausserdem noch 2 imaginären conischen Knoten C_2.

Ausser der durch B_4 gehenden vierfach zu rechnenden Geraden (grün), nach welcher sich die beiden imaginären Hauptebenen daselbst schneiden, liegt noch eine die 2 imaginären Knoten verbindende vierfach zählende Gerade (rot) und, unendlich fern, die beiden eben genannten schneidend, eine unäre Gerade auf ihr. Die Fläche ist negativ gekrümmt. (13×16 cm.)

51⁰. (VII, 14.) **Fläche mit** einem conischen Knoten C_2 und **einem biplanaren** B_5, welcher ein reelles Hauptebenenpaar besitzt und die Klasse um 5 erniedrigt.

Die 2 Hauptebenen gehen durch die zehnfach zählende grüne Gerade, die eine berührt die Fläche längs derselben und schneidet sie nach der fünffach zählenden, durch B_5 gehenden weissen, die andere berührt längs der zehnfach zu rechnenden roten Geraden. Ausserdem liegt auf der Fläche noch die zweifache, durch C_2 gehende weisse Gerade. Abgesehen von, als Teile der parabolischen Curve, mehrfach zählenden Geraden (rote fünffach, grüne vierfach), ist die parabolische Curve eine Curve dritter Ordnung, welche die erstgenannte Hauptebene in B_5 zur Schmiegungsebene besitzt und in C_2 die durch denselben gehende weisse Gerade berührt. (13×15 cm.)

52⁰. (VII, 15.) **Fläche mit** einem reellen conischen Knoten C_2 und **einem biplanaren** B_6 mit reellem Hauptebenenpaar, der die Klassenzahl um 6 reduciert.

Beide Hauptebenen gehen durch die fünfzehnfach zählende grüne Gerade; die eine osculiert die Fläche längs derselben, die andere berührt längs der zwölffach zu rechnenden roten. Der zwischen den beiden Knotenpunkten liegende geschlossene Flächenteil ist positiv gekrümmt, der andere negativ. (12×15 cm.)

53⁰. (VII, 16.) **Fläche mit einem uniplanaren**, die Klassenzahl um 6 reducierenden **Knoten** U_6, dessen Hauptebene die Fläche **in 3** achtfach zählenden roten Geraden schneidet.

Sie entsteht aus Nr. 45 durch Zusammenziehen der 3 Knotenpunkte in den U_6; die 3 unären Geraden von Nr. 45 bleiben dabei erhalten und besitzen ebenfalls reelle Asymptotenpunkte. Im Allgemeinen besitzt eine solche Fläche eine parabolische Curve sechster Ordnung, welche die Form eines die 3 unären Geraden berührenden Ovals besitzt. Weil aber auf dem vorliegenden Modell diese 3 Geraden sich schneiden, verschwindet dieses Oval und die Fläche ist negativ gekrümmt. (12×15 cm.)

54⁰. (VII, 17.) **Desgleichen,** jedoch schneidet die Tangentialebene im uniplanaren U_6 die Fläche nur n a c h e i n e r r e e l l e n roten Geraden. Ausser dieser enthält die Fläche nur noch eine reelle unäre Gerade (weiss), welche reelle Asymptotenpunkte besitzt. Die parabolische Curve, im allgemeinen Fall eine aus 2 Ovalen bestehende, jeden Knotenstrahl in U_6 berührende Curve sechster Ordnung, ist hier in 2 ebene Curven dritter Ordnung ausgeartet, von denen jede in U_6 einen Rückkehrpunkt besitzt. (12×15 cm.)

55⁰. (VII, 18.) **Fläche mit einem uniplanaren**, die Klasse um 7 reducierenden **Knoten** U_7, dessen Tangentialebene die Fläche längs

der sechzehnfach zählenden grünen Geraden berührt und nach der zehnfachen roten schneidet.

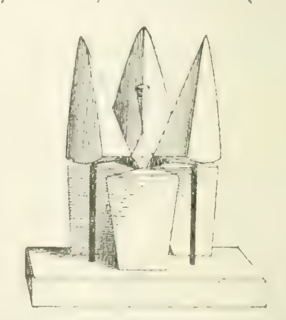
Die Tangentialebene längs der letzteren Geraden enthält die einzige unäre Gerade der Fläche mit 2 reellen Asymptotenpunkten. Die parabolische Curve ist, von den dazu gehörigen Geraden abgesehen (grüne sechsfach, rote doppelt), eine Curve vierter Ordnung, welche aus einem einzigen Oval besteht und in U_7 eine Spitze mit den grünen Geraden als Tangente daselbst besitzt. Durch diese Fläche findet der Übergang von Nr. 53 zu 54 statt. (12×15 cm.)

56⁰. (VII, 19.) **Fläche mit einem uniplanaren Knoten** U_8, durch welche die Klassenzahl um 8 vermindert wird.

Die Tangentialebene in U_8 osculiert die Fläche längs der einzigen siebenundzwanzigfach zählenden Geraden. Sieht man von dieser als Teil der parabolischen Curve zehnfach zu rechnenden Geraden ab, so ist die parabolische Curve ein Kegelschnitt, der in U_8 die Gerade der Fläche berührt. (12×15 cm.)

57⁰. (VII, 26.) Drahtmodell, darstellend die **Abbildung der Flächen mit 1, 2, 3, 4 conischen Knoten** C_2, welche einem reellen Pentaeder angehören, **auf den Punktraum.**

Im Allgemeinen lässt sich die Gleichung einer jeden Fläche dritter Ordnung als die Summe von 5 Cuben von linearen Ausdrücken in den Coordinaten darstellen, und zwar nur auf eine Weise. Diese 5 Ebenen bilden das zu dieser Fläche gehörige Pentaeder, sie bestimmen 10 Schnittgerade (Pentaederkanten), und 10 Schnittpunkte (Pentaederecken); ausserdem gibt es noch 10 Ebenen, welche je durch eine Pentaederecke und die gegenüberliegende Kante gehen (Diagonalebenen). Das vorliegende Drahtmodell stellt nun schematisch das allen Flächen mit nur conischen Knoten (Nr. 38—45) gemeinsame Pentaeder dar. (Für die Diagonalfläche Nr. 38 lässt sich dasselbe sofort angeben. Die 10 Ovalpunkte dieser Fläche sind die 10 Eckpunkte des Pentaeders; die 5 Ebenen desselben sind diejenigen Ebenen, welche je 3 nicht durch einen Punkt gehende rote Gerade enthalten; die 10 Diagonalebenen sind die Tangentialebenen in den Ovalpunkten.) Die gelben Drähte sind die Kanten des Pentaeders, dazu gehört noch die in der Horizontalebene gelegene, unendlich ferne Gerade, ihre Schnittpunkte (wovon 3 im Unendlichen) die Ecken desselben; die roten Geraden Schnitte von Pentaeder- und Diagonalebenen; die grünen von Diagonalebenen mit einander. Die Diagonal- und Pentaederebenen teilen den Raum im ganzen in 15 Kammern, wovon 5 von 4 (Tetraederkammern), 10 von 5 Ebenen (Pentaederkammern) begrenzt werden. In jedem Pentaeder gibt es im Allgemeinen nur eine einzige Fläche, welche in einem gegebenen Punkt einen Doppelpunkt besitzt. Je nachdem nun dieser Punkt in verschiedenen Kammern gewählt wird, gibt es verschiedene Arten von Flächen dritter Ordnung, die durch die römischen Zahlen im Modell gekennzeichnet sind. Ausser der beiliegenden Erklärung, von Rodenberg verfasst, vergleiche dessen Abhandlung in den Mathem. Annalen Bd. 14, pag. 46 ff.; bezüglich des Pentaeders ferner die Abhandlung von Clebsch im Crelle'schen Journal Bd. 59, pag. 194 ff.; ferner Salmon-Fiedler, Geom. d. Raumes, II. Teil, Art. 269, 282. 2. Aufl. (14×22 cm.)



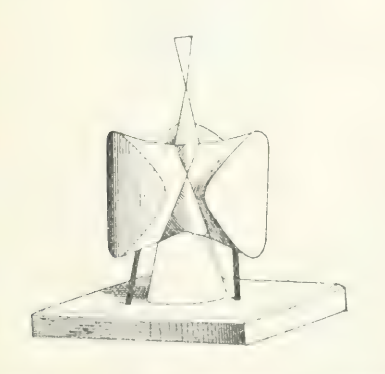
58⁰. (VII, 24 a.) **Hesse'sche Fläche zu Nr. 39 und 42.**

Sie ist eine Fläche vierter Ordnung mit 14 reellen Doppelpunkten, von denen im

vorliegenden Fall 3 im Unendlichen liegen. In den 4 Knotenpunkten der Fläche dritter Ordnung (Nr. 39), welche zugleich der Hesse'schen Fläche angehören, kommen noch diejenigen 10 Knoten hinzu, welche in den 10 Eckpunkten des ihr zugehörigen Pentaeders liegen; 6 davon sind die Schnittpunkte je einer roten und weissen Geraden (3 davon liegen im Unendlichen). Auf der Hesse'schen Fläche liegen ferner 16 Gerade, längs welchen je dieselbe Tangentialebene berührt, 10 davon sind die Kanten des der zugehörigen Fläche dritter Ordnung angehörenden Pentaeders, die 6 andern sind zugleich die 6 Knotenstrahlen der Fläche dritter Ordnung. (Wird die obige Fläche als Hesse'sche Fläche von Nr. 39 angesehen, so sind die roten Geraden auf ihr die Knotenstrahlen, die grünen Pentaederkanten, für Nr. 42 verhält es sich umgekehrt). (21×25 cm.)

59⁰. (VII, 24 b.) Der durch die Knotenpunkte begrenzte endliche **Teil der vorhergehenden Fläche** vergrössert und regelmässig angenommen.

Derselbe würde ein Teil der Hesse'schen Fläche, einer solchen Fläche dritter Ordnung sein, für welche das Tetraeder der Knotenpunkte ein reguläres ist und bei der die Ebene der 3 unären (weissen) Geraden im Unendlichen liegt. (13×16 cm.)



60⁰. (VII, 25.) **Hesse'sche Fläche zu Nr. 44**, aus Zweckmässigkeitsgründen in etwas anderen Dimensionen modelliert.

Sie besitzt 13 reelle Knoten, davon 3 im Unendlichen; ferner 13 Gerade, 10 davon sind die Kanten des Pentaeders (eine ist unendlich fern), 3 die Knotenstrahlen der ihr zugehörenden Fläche 3. Ordnung. (21×25 cm.)

NB. Weitere, dieser Rubrik zuzurechnende Modelle finden sich unter Nr. 192 (II, 2), und Nr. 266 (XIV, 4.).

b) Regelflächen 3. Ordnung, insbesondere Kegel.

61⁰–64⁰. (VII, 20–23). **Gipsmodelle der Regelflächen 3. Ordnung nach Prof. Dr. C. Rodenberg.**

61⁰. (VII, 20.) **Regelfläche,** deren Doppelgerade völlig von reellen Flächenteilen umgeben ist.

Sie wird (wie Nr. 62 und 63) durch die Verbindungsgeraden entsprechender Elemente der grünen Geraden und des auf sie projectivisch bezogenen, auf der Fläche liegenden, weissen Kegelschnittes (Kreis) gebildet und ist, wie alle Regelflächen, von derselben Klasse wie Ordnung, d. h. hier der dritten. Die grüne Gerade durchsetzt die Ebene des Kreises hier in seinem Innern. (13×15 cm.)

62⁰. (VII, 21.) **Regelfläche,** wie vorher, nur verläuft die Doppelgerade zum Teil isoliert.

Sie verlässt die reellen Flächenteile in 2 Zwickpunkten*), welche auf der Fläche durch den Durchschnitt der 2 roten Erzeugenden mit der Doppelgeraden markiert werden. Diejenigen durch die grüne Gerade (hier ausserhalb des Kreises verlaufend)

*) „Zwickpunkte" (pinchpoints) nennt man diejenigen Punkte einer Doppelcurve, in welchen die beiden Tangentialebenen zusammenfallen; sie trennen im Allgemeinen die isoliert verlaufenden Teile der Doppelcurve von denen mit reellen Tangentialebenen und sind als uniplanare Punkte zu betrachten.

gehenden 2 Ebenen, welche den Kreis berühren, liefern die 2 roten Erzeugenden. (13×15 cm.)

63⁰. (VII, 22.) **Cayley'sche Regelfläche** dritter Ordnung.

Die beiden Zwickpunkte der vorigen Fläche haben sich im unendlich fernen Punkt der Doppelgeraden vereinigt. Sie entsteht dann, wenn die grüne (vergl. Nr. 61) Gerade den Kreis trifft; diese Gerade wird dann zugleich die Doppelgerade. (13×15 cm.)

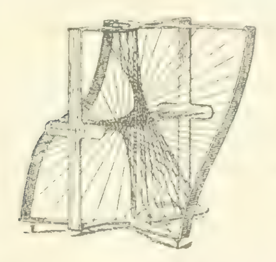
64⁰. (VII, 23.) **Desgleichen, collinear** zu der vorigen Fläche; der Kegelschnitt liegt im Unendlichen. (13×15 cm.)

Ganze Serie VII Mk. 300.—.
Gruppe I Mk. 140.—, Gruppe II Mk. 160.—.

65—68. (XVIII, 1—4.) **Fadenmodelle der Regelflächen 3. Ordg.** Von stud. *C. Tesch* in Karlsruhe (W).

Als Leitlinien der Fläche sind gewählt ein Kreis, eine die Kreisebene in einem Peripheriepunkte rechtwinklig schneidende Gerade und eine die Kreisebene schneidende zweite Gerade. Die Erzeugenden der Fläche sind durch schwächere, die Leitgeraden durch stärkere Fäden dargestellt, die Schnittpunkte durch Perlen hervorgehoben. Der Leitkreis ist durch Fäden in seiner Ebene und durch Perlen veranschaulicht.

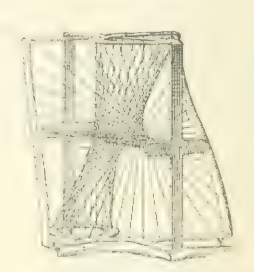
Die Serie stellt 4 verschiedene Fälle dar.



65. (XVIII, 1.) I. Fall. Die zweite Leitgerade schneidet die Ebene des Kreises in einem innerhalb desselben gelegenen Punkte. Die erste Leitgerade ist **ihrem ganzen Verlaufe nach reelle Doppellinie** der Fläche. Die Kanten und Cuspidalpunkte sind imaginär. (20×20 cm.) . Mk. 25.—.

66. (XVIII, 2.) II. Fall. Die zweite Leitgerade schneidet die Ebene des Kreises in einem ausserhalb desselben gelegenen Punkte. Die erste Leitgerade ist **längs einer endlichen Strecke reelle Doppellinie,** in den beiden sich in das Unendliche erstreckenden Zweigen isolierte Linie der Fläche. Es sind zwei reelle Kanten vorhanden, welche durch die beiden Grenzpunkte des reellen Teiles der Doppellinie gehen. Diese Grenzpunkte sind Cuspidalpunkte der Fläche. (20×20 cm.) Mk. 25.—.

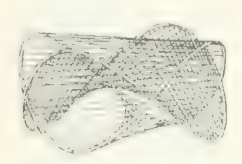
67. (XVIII, 3.) III. Fall. **Der Leitkegelschnitt,** hier eine Ellipse, **ist in das Unendliche gerückt** und durch einen Richtkegel gegeben, der durch seine Erzeugenden dargestellt ist. Die zweite Leitgerade schneidet die Ebene des unendlich fernen Kegelschnittes in einem ausserhalb desselben gelegenen Punkt. Ein endlicher Teil der ersten Leitgeraden ist isolierte Linie, die beiden sich ins Unendliche erstreckenden Zweige reelle Doppellinie der Fläche. Die Kanten und Cuspidalpunkte sind wie im zweiten Fall reell. (20×20 cm.) Mk. 25.—.



68. (XVIII, 4.) IV. Fall. **Die Cayley'sche Fläche.** Die zweite Leitgerade fällt mit der ersten zusammen. Dieselbe ist in ihrem ganzen Verlaufe reelle Doppellinie und zugleich Kante der Fläche. Die beiden Cuspidalpunkte fallen in einen Punkt zusammen, durch welchen Punkt noch die zweite Kante der Fläche geht.
(20×20 cm.) . . . . Mk. 25.—.

Ganze Serie Mk. 90.—.

69. 70. (XXIII 9a u. b.) **Cylindroid (Plücker'sches Conoid).** Fadenmodell von Prof. Dr. *H. Wiener.* Vgl. das folgende Modell. (13×12 u. 7½×15 cm.) . . je Mk. 2.—.



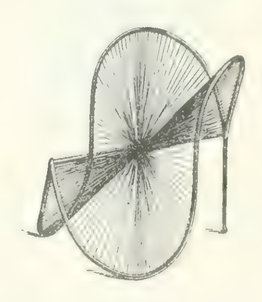
71. (XXIII, 10.) **Cylindroid, vereint mit dem rechtwinkligen Paraboloid** (Nr. 28, XXIII, 8b.) Fadenmodell von Prof. Dr. *H. Wiener.* Das rechtwinklige Paraboloid ist der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei gegebenen Geraden gleichweit abstehen. Es hat zu unendlich vielen Geradenpaaren diese Lage, und diese sind die Erzeugenden eines Cylindroids. Das Modell gibt diese beiden Flächen in dieser Lage vereint wieder. (7½×15 cm.) . . . . Mk. 5.40.

72—78. (XXV, 1—7.) **Fadenmodelle der Kegel dritter Ordnung** nach Professor Dr. *H. Wiener.*

Diese Modelle sollen hauptsächlich auch dem Studium der ebenen Curven dritter Ordnung dienen (vergl. hierzu des Näheren die Beschreibung dieser Serie pag. 58), insofern es diejenigen Gestalten betrifft, die durch ihr Verhalten gegen die unendlich ferne Gerade bedingt sind. Eine Einteilung der ebenen Curven dritter Ordnung, wie sie der Unterscheidung der Curven zweiter Ordnung in Ellipse, Hyperbel und Parabel entspricht, hat zuerst *Newton* unternommen und gezeigt, dass sich alle Curvenarten aus 5 besonderen Curven, den divergierenden Parabeln durch Projection ableiten lassen. Nach ihm griff *Möbius* die Aufgabe wieder auf; um keine einzelne Gattung der Curven vor den anderen gleichberechtigten auszuzeichnen, setzt er an die Stelle der Curven die projicierenden Kegel und unterscheidet von diesen 7 Gattungen, die sich auf solche vom Geschlecht Null oder Eins verteilen.

Vgl. Newton Enumeratio linearum tertii ordinis, 1706; Plücker, System der analytischen Geometrie, 3. Abschnitt, 1835; Cayley, On the classification of cubic curves, Cambr. Philos. Transactions XI, pag. 81; Möbius, Geo. Werke, Bd. II pag. 90; Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven, (2. Aufl.) 1882, pag. 164 ff.

Kegel vom Geschlechte Null gibt es nur drei projectiv verschiedene Gestalten, nämlich:



72. (XXV, 1.) Der Kegel besitzt eine Rückkehrkante und ist von der dritten Klasse . . . . Mk. 18.—.

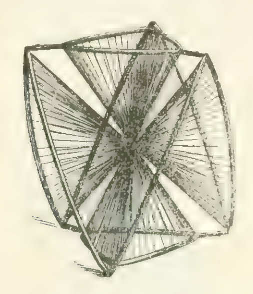
73. (XXV, 2.) Der Kegel besitzt eine Doppelkante als Selbstschnitt und ist von der vierten Klasse . . . . Mk. 18.—.

74. (XXV, 3.) Der Kegel besitzt eine isolierte Dppelkante und ist ebenfalls von der vierten Klasse . . . . Mk. 20.—.

Die Kegel vom Geschlechte Eins sind sämtlich von der sechsten Klasse. Ein solcher Kegel kann entweder allein aus einem unpaaren Mantel oder aus einem solchen und einem hinzutretenden paaren Mantel bestehen, und man wird bei Berücksichtigung dieses Unterschiedes zwei Gattungen von Kegeln vom Geschlechte Eins zu unterscheiden haben, die zusammen mit den drei Gattungen vom Geschlechte

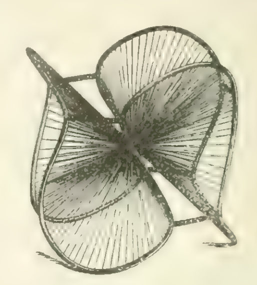
Null den „5 Newton'schen Parabeln" entsprechen. Aber unter den einmanteligen Kegeln vom Geschlechte Eins gibt es noch einen ausgezeichneten, bei dem nämlich die drei Berührebenen der Wendekanten durch eine Gerade hindurchgehen, und dieser ist ein Zwischenglied zwischen solchen, bei denen der Kegelmantel sich entweder durch drei Dreikante oder durch drei Vierkante hindurchwindet, die durch jene drei Berührebenen und die Ebene der drei Wendekanten begrenzt werden.

Dem entsprechen die folgenden Modelle:



75. (XXV, 4.) Der Kegel besteht aus einem paaren und einem unpaaren Mantel. Mk. 20.—.

76. (XXV, 5.) Der Kegel besteht aus einem einzigen unpaaren Mantel und durchzieht die Dreikante . . . . Mk. 16.—.



77. (XXV, 6.) Der Kegel besteht aus einem einzigen unpaaren Mantel und durchzieht die Vierkante . . . . Mk. 20.—.

78. (XXV, 7.) Der Kegel besteht aus einem einzigen unpaaren Mantel und besitzt drei durch eine Gerade gehende Wendeberührebenen . . . . . . Mk. 16.—.

(Höhe der Modelle 17 cm.)

Ganze Serie Mk. 128.—.

Vgl. die Modelle Nr. 152, 153 (XVII, 2); hier sind die Schnittcurven der Kegel dritter Ordnung mit Kugeln dargestellt, die um ihre Spitzen beschrieben werden.

III. Algebraische Flächen vierter Ordnung.

a) Cycliden.

Unter Cycliden im allgemeinen Sinn (nach Darboux) versteht man alle diejenigen Flächen vierter Ordnung, welche den unendlich fernen imaginären Kugelkreis zur Doppelcurve haben. Sie sind die Enveloppen aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer Fläche zweiten Grades liegen und eine gegebene Kugel stets orthogonal schneiden. Sie besitzen Scharen von Kreisen, die teilweise zugleich Krümmungslinien sein können; die Krümmungslinien sind im Allgemeinen jedoch höhere algebraische Curven. Diese Flächen können bis 4 Knotenpunkte enthalten.

Die Flächen mit 1, 2, 3, 4 Doppelpunkten erhält man auch durch Transformation mittelst reciproker Radien beziehungsweise aus folgenden Flächen zweiter Ordnung: a) allgemeine Fläche zweiter Ordnung, b) beliebiger Kegel, c) Rotationsfläche, d) Kreiskegel. Da die Krümmungslinien dabei erhalten bleiben, und Gerade und Kreise im Allgemeinen in Kreise, Ebenen und Kugeln in Kugeln übergeführt werden, so besteht im Falle b) und c) das eine System von Krümmungslinien aus Kreisen, die sich in 2 Doppelpunkten der Fläche schneiden, das andere wird durch Kugeln ausgeschnitten (ist sphärisch). Im Falle d) sind die beiden Kreisscharen, welche aus

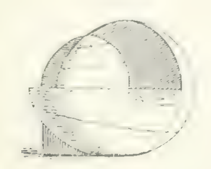
den Erzeugenden, resp. Parallelkreisen des Rotationskegels sich ergeben, von denen die ersteren sich in den 2 reellen, die anderen in den 2 imaginären Knotenpunkten sich schneiden, zugleich Krümmungslinien. Man nennt diese letzteren Dupin'sche Cycliden. Dieselben ergeben sich auch als Enveloppen aller Kugeln, welche 3 gegebene berühren. Vergl. die Abhandlung von Maxwell in Quart. Journ. of Math. Bd. 9, pag. 111, sowie Salmon - Fiedler, Geometrie des Raumes, II. Teil. Art. 313—323 (2. Aufl.).

79—85. Dupin'sche Cycliden. Sie wurden mit Ausnahme von Nr. 80, 81 u. 85 von Assistenten Dr. *P. Vogel* in München modelliert. (B).

79. (V, 5 a.) **Ringcyclide** mit 4 imaginären Knotenpunkten (davon ist die gewöhnliche Wulstfläche ein specieller Fall). Die aufgezeichneten 2 Kreisscharen sind die Krümmungslinien. (7×14 cm.) Mk. 9.—.

80. 81. (IX, 7 u. 8.) **Dieselbe** in anderen Verhältnissen. Auf beiden sind ausser den Krümmungslinien noch Schnittcurven mehrerer doppelt berührender Ebenen aufgezeichnet. Diese beiden Modelle sind Abgüsse der im Besitze des mathematischen Seminars in Berlin befindlichen, von Herrn *Kummer* angefertigten Originale. (12×5 u. 9×6 cm.) . Preis zusammen Mk. 12.—.

82. (V, 5b.) **Horncyclide.** Sie besitzt neben 2 imaginären 2 reelle Knotenpunkte, welche 2 auseinander liegende Flächenmäntel vereinigen; die aufgezeichneten Kreise sind Krümmungslinien. (19×6 cm.) Mk. 11.50.



83. (V, 5c.) **Spindelcyclide.** Sie besitzt neben 2 imaginären 2 reelle Knotenpunkte, welche 2 ineinander liegende Flächenmäntel vereinigen; die aufgezeichneten Kreise sind Krümmungslinien. (10×11 cm.) Mk. 6.50.

84. (V, 5d.) **Parabolische Horncyclide.** Sie besitzt 2 reelle Knotenpunkte, welche durch eine auf der Fläche liegende Gerade verbunden sind; die 2 imaginären Knotenpunkte liegen ebenfalls auf einer zur ersten senkrechten Geraden; die Fläche ist bloss dritter Ordnung (die reelle unendlich ferne Ebene sondert sich ab). (15×12 cm.) Mk. 11.50.

85. (X, 5.) **Parabolische Ringcyclide.** Bei ihr sind alle vier Knotenpunkte imaginär, die Verbindungsgeraden beider Paare, welche ganz auf der Fläche liegen, dagegen reell. Ausser diesen befinden sich noch 2 sich schneidende Geraden und eine unendlich ferne auf der Fläche, die von der dritten Ordnung ist. Die aufgezeichneten Curven (Kreise) sind Krümmungslinien. Die Fläche enthält, wie Nr. 84, den unendlich fernen imäginären Kugelkreis nur noch einfach, es sondert sich die unendlich ferne Ebene als ein Bestandteil ab. Von stud. math. *Finsterwalder.* Erklärung beigegeben. (20×12 cm.) Mk. 10.—.

86—88. (X, 8.) Diese 3 Flächen sind **Cycliden im weiteren Sinne** mit 3, bezw. 2 Knotenpunkten. Sie wurden von stud. math. *Finsterwalder* in München angefertigt. Erläuterung beigegeben.

Preis zusammen Mk. 12.—.

86. (X, 8a.) **Cycliden-Fläche mit 2 conjugiert imaginären Doppelpunkten.** (10×7 cm.)

87. (X, 8b.) **Cycliden-Fläche mit 2 conjugiert imaginären Doppelpunkten und einem reellen.** (10×5 cm.)

88. (X, 8c.) **Cycliden-Fläche mit einem uniplanaren Knoten,** der durch Zusammenziehen der 3 Knoten in Nr. 87 entsteht.

Die beiden letzteren Flächen sind Orthogonalflächen desjenigen Strahlensystems, welches durch Reflexion eines Strahlenbüschels an einem unendlich dünnen Kreisringe entsteht. Im Falle Nr. 87 liegt der leuchtende Punkt ausserhalb des Kreises

in der Ebene desselben, im Falle Nr. 88 auf dem Kreise selbst.

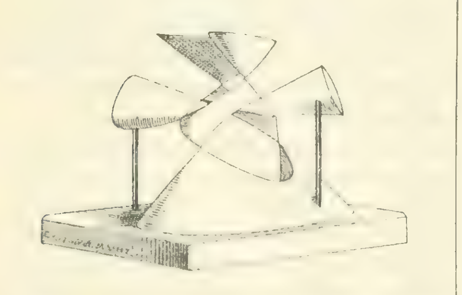
Als Cycliden entsprechen die Flächen Nr. 86—88 dem pag. 90 unter b) erwähnten Fall; sie sind also durch Inversion aus einem Kegel erzeugt, und zwar im Falle der ringförmigen (Nr. 86) und der hornförmigen (Nr. 87) Fläche mittelst eines imaginären Inversionscentrums; die herzförmige (Nr. 88) entsteht durch Inversion aus einem parabolischen Cylinder, wobei das Centrum auf der Scheitelgeraden gelegen ist.

Die 3 Flächen sind Repräsentanten von Flächen 4. Ordnung, für die **ein** Mantel der Centrafläche sich auf einen Kreis reduciert.

b) Kummer'sche Flächen.

Die Kummer'sche Fläche (Singularitätenfläche eines Complexes zweiten Grades) ist von der vierten Ordnung und von der vierten Klasse und besitzt 16 Knotenpunkte und ebensoviele Doppeltangentialebenen, welche je 6 Knotenpunkte enthalten. Vergl. Kummer, Abhandlungen der Berliner Akademie von 1886 pag. 62 ff.; Plückers Werk: Neue Geometrie des Raumes etc., Leipzig 1868; Salmon, Geometrie des Raumes II. pag. 411—414, sowie Kapitel XII.

89. (II, 1 a.) **Alle 16 Knotenpunkte und Doppeltangentialebenen sind reell.** (22×18 cm.) Mk. 24.—.



90. (II, 1 b.) **8 der Knotenpunkte und Doppeltangentialebenen sind reell.** (30×20 cm.) Mark 28.—.

91. (II, 1 c.) **4 der 16 Knotenpunkte und Doppeltangentialebenen sind reell.** (20×15 cm.) Mk. 18.—.

Alle 3 Modelle wurden von stud. math. *Rohn* in München (K) modelliert; Erläuterungen werden beigegeben.

Zu den Kummer'schen Flächen sind ferner noch die unter Nr. 301 (X, 7) und Nr. 303 (VI, 2) aufgeführten Wellenflächen zu rechnen.

c) Flächen 4. Ordnung mit 4 längs Kreisen berührenden Ebenen.

92—97. (IX, 1—6.) Diese Modelle sind Copien nach den im Besitze des mathematischen Seminars der k. Universität zu Berlin befindlichen Originalen, von Herrn *Kummer* besprochen in den Monatsberichten der k. Akademie zu Berlin von 1862, 1866, 1872. Abdrücke werden beigelegt.

Die Gleichung aller dieser Flächen lässt sich in die Form bringen: $\varphi^2 - \lambda pqrs = o$, wo $\varphi = o$ die Gleichung einer Fläche zweiter Ord.; $p, q, r, s = o$ die von 4 Ebenen bedeuten; es sind dies diejenigen 4 Tangentialebenen, welche die Flächen längs einer Curve berühren. Die 4 Ebenen bilden in den Modellen ein reguläres Tetraeder:

$$p = x + y + z - a$$
$$q = -x + y - z - a$$
$$r = -x - y + z - a$$
$$s = x - y - z - a,$$

und die 12 Schnittpunkte der 6 Kanten desselben mit der Fläche zweiter Ord., einer Kugel, deren Mittelpunkt mit dem des Tetraeders zusammenfällt und deren Gleichung daher ist:

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = o,$$

sind Knotenpunkte der dargestellten Fläche vierter Ord. Je nach der Annahme des Radius der Kugel r und des Parameters λ (das Tetraeder als gegeben betrachtet) erhält man verschiedene Typen, von denen die charakteristischen modelliert sind.

92. (IX, 1.) **Die Fläche besteht aus 4 congruenten Teilen, die in 6 biplanaren Knotenpunkten zusammenhängen.** Die zwei Tangen-

tialebenen in jedem solchen Punkt sind reell und berühren die Fläche in Kreisen. Sie entsteht, indem die Kugel die Kanten des Tetraeders berührt, d. h. indem $a = r$, $\lambda < o$ ist. Die aufgezeichneten Curven sind die Kegelschnittpaare, nach welchen die Fläche von jeder Tetraederfläche geschnitten wird. Die biplanaren Knoten besitzen hier die Eigentümlichkeit, dass in denselben jede durch den Schnitt der beiden Tangentialebenen gehende Ebene die Fläche nach einer Curve mit Berührpunkt statt mit Spitze schneidet. (11×11 cm.) . . . . Mk. 17.—.

93. (IX, 2.) **Wie oben.** In den biplanaren Knotenpunkten sind jedoch die Tangentialebenen imaginär; man erhält sie, wenn man $a = r$ setzt und $\lambda > o$ wählt. (10×10 cm.) Mk. 19.—.



94. (IX, 3.) **Römische Fläche von Steiner.** Man erhält sie, indem man $a = r$, $\lambda = 1$ setzt. Sie besitzt 3 sich schneidende Doppelgeraden und ist von der dritten Klasse. Auf dem Modell sind auch die Asymptotencurven eingezeichnet. (10×10 cm.) . Mk. 10.—.

95. (IX, 4.) **Fläche aus 10** (6 und 4 je unter sich congruenten) **Teilen bestehend,** welche in 12 conischen Knotenpunkten zusammenhängen:

$$r \begin{matrix} > a \\ < a\sqrt{2}, \end{matrix}$$
$$\lambda > o.$$

(11×11 cm.) . . . . . . Mk. 23.—.

96. (IX, 5.) **Fläche, bestehend aus 6 congruenten Teilen,** welche in 4 uniplanaren Knoten zusammenhängen. Die Kugel geht durch die Ecken des Tetraeders, die 3 Knoten der dreizipfligen Teile der vorigen Fläche



vereinigen sich zu einem uniplanaren. Man erhält sie für: $r = a\sqrt{2}$, $\lambda > o$. (10×10 cm.) Mk. 21.—.

97. (IX, 6.) **Fläche, bestehend aus 4 congruenten Teilen,** die in 4 uniplanaren Knoten zusammenhängen. Man erhält sie $r = a\sqrt{2}$, $\lambda < o$. (12×12 cm.) Mk. 23.—.

Diesen Modellen ist als Erläuterung ein Abdruck der in den Berliner Akademieberichten vom Jahre 1863, 1866, 1872 erschienenen Abhandlungen von Prof. Kummer über diesen Gegenstand beigegeben.

d) Flächen vierter Ordnung mit Doppelgeraden.

98. (IX, 9.) **Fläche 4. Ord. mit einer Doppelgeraden.** Auf derselben liegen 2 Zwickpunkte und ein 3facher Punkt, Durchstosspunkt der Doppelgeraden mit der Fläche. Alle durch diese Gerade gelegten Ebenen schneiden die Fläche nach Kreisen. Die Fläche ist der geometrische Ort der Krümmungskreise aller Normalschnitte in einem gewöhnlichen Punkte (positiver Krümmung) einer beliebigen Fläche. (Vergl. Salmon-Fiedler, Geometrie des Raumes, II. Teil, 2. Aufl., Cap. VI, § 308.) (9×3 cm.) . . . . Mk. 6.—.

Abguss nach einem von Herrn *Kummer* angefertigten und in dem Besitze des mathematischen Seminars der Berliner Universität befindlichen Modell.

99. (X, 4.) **Fläche 4. Ord. mit 2 sich schneidenden Doppelgeraden** (böhmisches Gewölbe). Sie besitzt auf jeder der Doppelgeraden 2 Zwickpunkte, einen einfachen



Selbstberührungspunkt, 4 nach Kreisen berührende Tangentialebenen und entsteht dadurch, dass man den Mittelpunkt eines Kreises auf einem andern von gleichem Radius fortrücken lässt, wobei die Ebene des beweglichen Kreises stets zu sich parallel und senkrecht zur Ebene des festen vom Mittelpunkt des beweglichen durchlaufenen bleibt. Von stud. math. *Finsterwalder* in München. (6×10 cm.) . . . Mk. 3.50.

e) Regelflächen vierter Ordnung.

Durch Seidenfäden in Metallrahmen dargestellte Modelle nach Prof. Dr. K. Rohn in Dresden.

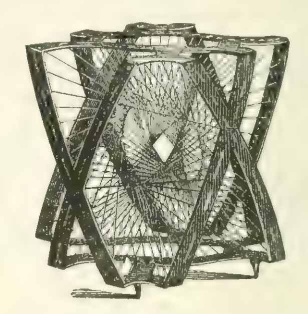
Vergl. Rohn's Aufsatz: Die verschiedenen Arten der Regelflächen vierter Ord., Math. Annal. Bd. XXVIII; der Serie ist diese Abhandluug beigegeben und ist daselbst auf die Modelle verwiesen.

Diese Regelflächen zerfallen nach der Art ihrer Doppelcurve in 4 verschiedene Klassen; nämlich:

1) solche mit 2 Doppelgeraden,
2) solche mit Doppelgerade und Doppelkegelschnittt,
3) solche mit Doppelcurve dritter Ord.,
4) solche mit dreifacher Geraden.

Jede dieser Klassen zerfällt weiter in Unterklassen, je nach der Anzahl ihrer reellen Zwickpunkte, welche sich auf der Doppelcurve vorfinden. Die verschiedene Art der Doppelcurve einerseits und die Realität der Zwickpunkte andererseits bedingen die Verschiedenheit der Flächengestalten und damit zugleich ihrer Projectionen, die sich als Curven vierter Klasse mit zwei, resp. drei Doppeltangenten oder einer dreifachen Tangente erweisen. Die einzelnen Flächen sind möglichst symmetrisch construiert, ohne ihre Gestalt zu specialisieren.

100. (XIII, 1.) **Regelfläche 4. Ord. mit 2 Doppelgeraden und 8 reellen Zwickpunkten;** sie besteht aus zwei congruenten Teilen, auf denen je ein Stück von jeder Doppelgeraden verläuft . . . . . Mk. 36.—.



101. (XIII, 2.) **Regelfläche 4. Ord. mit 2 Doppelgeraden ohne reelle Zwickpunkte;** sie besteht aus zwei congruenten Mänteln, die sich längs der beiden Doppelgeraden gegenseitig durchsetzen . . . . . Mk. 44.—.

102. (XIII, 3.) **Regelfläche 4. Ord. mit 2 Doppelgeraden; auf der einen liegen 4 reelle, auf der andern 4 imaginäre Zwickpunkte.** Sie besitzt zwei congruente Mäntel, die sich längs der einen Doppelgeraden durchschneiden, während jeder Mantel ein Stück der anderen Doppelgeraden enthält. Mk. 40.—.

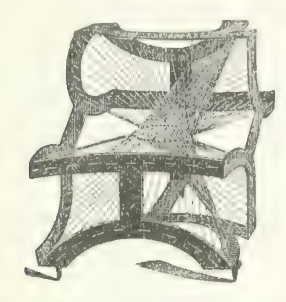
103. (XIII, 4.) **Regelfläche 4. Ord. mit 2 imaginären Doppelgeraden;** sie besitzt zwei congruente Mäntel, die Hyperboloiden ähnlich sehen. Die Projection eines solchen Mantels besteht aus zwei hyperbelartigen Aesten, deren einer zwei Spitzen mit Doppelpunkt aufweist . . . . Mk. 36.—.

104. (XIII, 5.) **Regelfläche 4. Ord. mit Selbstberührungsgeraden und 4 reellen Zwickpunkten;** sie besteht aus zwei congruenten Teilen und erscheint als interessanter Specialfall der Fläche 100 . . . . Mk. 36.—.

105. (XIII, 6.) **Regelfläche 4. Ord. mit dreifacher Geraden und 4 reellen Zwickpunkten;** alle Erzeugende treffen eine Leit-

gerade. Diese Fläche besitzt nur einen Mantel, der an 4 Stellen eine Faltung zeigt. Mk. 40.—.

106. (XIII, 7.) **Regelfläche 4. Ord. mit dreifacher Geraden,** deren Punkte zwei constante und eine bewegliche Tangentialebene aufweisen. Während die Erzeugende die Regelfläche beschreibt, passiert sie zweimal die Lage der dreifachen Geraden, auf der zwei höhere singuläre Punkte entstehen. Mk. 40.—.



107. (XIII, 8.) **Regelfläche 4. Ord. mit Doppelkreis und Doppelgeraden,** die sich rechtwinklig schneiden; auf jeder Doppelcurve liegen zwei reelle Zwickpunkte. Die Fläche ist mehrfach symmetrisch; der Selbstberührungspunkt (Schnittpunkt von Kreis und Geraden) liegt reell auf der Fläche. Mk. 44.—.

108. (XIII, 9.) **Regelfläche 4. Ord. mit Doppelcurve 3. Ord. und vier reellen Zwickpunkten.** Die Fläche besteht aus einem Mantel, auf dem zwei Stücke der Doppelcurve liegen; die Erzeugenden sind teils reelle, teils ideelle Doppelsecanten der Raumcurve 3. Ord., darunter vier Tangenten. Mk. 40.—.

109. (XIII, 10.) **Regelfläche 4. Ord. mit Doppelcurve 3. Ord. ohne reelle Zwickpunkte.** Auch diese Fläche besitzt nur einen Mantel, der sich jedoch längs der ganzen Doppelcurve selbst durchsetzt. Gleichwohl sind die Erzeugenden wieder zum Teil reelle, zum Teil ideelle Doppelsecanten der Raumcurve 3. Ord., unter denen sich wieder vier Tangenten befinden . . . . . Mk. 40.—.

(Grösse aller Modelle 18×18 cm.)

Ganze Serie Mk. 380.—.

IV. Algebraische Flächen von höherer als 4. Ordnung. Liniengeometrie.

110. (X, 9.) **Fläche 8. Ord.** Sie besitzt 2 zu einander senkrechte, sich schneidende Selbstberührungsgeraden, von denen jede in 2 uniplanaren Punkten höherer Ordnung (durch Zusammenziehen von 2 Zwickpunkten entstanden) aus ihr heraustritt, 2 congruente ebene Doppelcurven 4. Ord., die im Mittelpunkt (hohe Singularität) einen Selbstberührungspunkt besitzen und aus der Fläche in zusammen 8 Zwickpunkten heraustreten, endlich 2 Doppeltangentialebenen, welche die Fläche längs zweier Kreise berühren. Sie entsteht durch die Bewegung eines Kreises von unveränderlichem Radius dadurch, dass die Endpunkte eines Durchmessers desselben stets auf 2 zu einander senkrechten Geraden gleiten (die beiden Selbstberührungsgeraden), während die Ebene des beweglichen Kreises stets auf der Ebene der beiden Geraden senkrecht steht. Die genannte Fläche enthält den unendlich fernen imaginären Kugelkreis als Doppelcurve. Von stud. math. *Finsterwalder* in München (B). (7×5 cm.) Mk. 4.—.

111. (VIII, 3.) **Fläche 12. Ord.** Ihre Horizontalschnitte sind solche Brennlinien,

wie sie durch Reflexion eines von einem Punkt ausgehenden Strahlenbüschels an einem Kreise entstehen. Dieselben sind so auf einander geschichtet, dass die reflectierenden Kreise einen Kreiscylinder bilden, während die leuchtenden Punkte eine um 45⁰ gegen die Horizontalebene geneigte Gerade ausfüllen. Die Fläche kann angesehen werden als ein Teil der Brennfläche der von einer leuchtenden Linie ausgehenden Strahlen nach ihrer Reflexion an einem Cylinder, dessen Axe die Linie trifft. Die Fläche besitzt als Rückkehrkanten 2 sich in einem Punkte berührende gleichseitige Hyperbeln und eine weitere Raumcurve, die sich selbst und die Hyperbeln in dem genannten Punkte berührt. Von stud. math. *Finsterwalder* in München (B); hierzu eine Erläuterung. (13×20×12 cm.) . . . . . Mk. 15.—.

112—114. (I, 2.) **Fläche 12. Ordnung. Brennfläche, welche von einem zur Axe wenig geneigten Parallelstrahlen-System nach deren Durchgang durch ein centriertes Linsensystem eingehüllt wird.** (Vergl. Seidel, Schumachers Astron. Nachrichten, Nr. 1027 ff., Monatsberichte der Berliner Academie, Dec. 1872, Finsterwalder, Abh. der bayer. Acad. von 1891.) Das Modell ist affin zu der Centrafläche des Paraboloids:

$$\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{10}-2x=0;$$

die vorzunehmende Transformation wäre $X=x,\ Y=y,\ Z=\sqrt{1{,}2}\cdot z$. Die Fläche besitzt 2 Rückkehrkanten, beide gewöhnliche Parabeln, welche in zu einander senkrechten Ebenen liegen; ferner eine Doppelcurve 12. Ord., längs deren sich die beiden Mäntel durchsetzen. Von stud. math. *Schleiermacher* (B). Erläuterung beigegeben.

112. 113. (I, 2a.) Die beiden Mäntel der Fläche getrennt. (10×10 u. 7×7 cm.) je Mk. 5.—.

114. (I, 2b.) Die beiden Mäntel vereinigt. (10×11 cm.) . . . . Mk. 5.—.

115—117. (I, 3.) **Fläche 12. Ordnung. Centrafläche des einschaligen Hyperboloids.** Sie besitzt 3 ebene Rückkehrkanten, nämlich 2 Hyperbeln und eine Ellipse, welche in 3 zu einander senkrechten Ebenen liegen; ferner eine Doppelcurve 24. Ordnung. (Vgl. Cayley, On the Centro-Surface of an Ellipsoid. Cambridge, Philos. Transactions, vol. XII. pag. 319 ff.; Salmon-Fiedler, Analyt. Geometrie des Raumes Bd. 1, Art. 207 und Bd. 2, Art. 244, 2. Aufl.) Von stud. math. *W. Dyck* (B). Erläuterung beigegeben.

115. 116. (I, 3a.) Die beiden Mäntel getrennt. (17×16 cm.) zusammen Mk. 17.—.



117. (I, 3b.) Die beiden Mäntel vereinigt. (17×16 cm.) . . . . Mk. 10.—.

Zu den algebraischen Flächen gehören auch einige der Rotationsflächen mit Asymptotencurven, und zwar Nr. 176 — 180, 182—185 (X, 10.), ferner die Typen conischer Knotenpunkte Nr. 188 – 191 (XVII, 7.), die Minimalfläche 9. Ord. Nr. 224 (VIII, 2.) und die Modelle zur Funktionentheorie Nr. 263—265, (XIV, 1. 2. 3.).

V. Schraubenflächen.

118—123. (XX, 1—5.) **Fadenmodelle der Regelschraubenflächen.** Von Assistenten *C. Tesch* in Karlsruhe (W).

Eine Schraubenfläche wird von einer Curve beschrieben, die um eine Axe eine Schraubenbewegung ausführt. Wird eine Gerade als diese Curve gewählt, so unterscheidet man geschlossene und offene Schraubenflächen, je nachdem die gebrauchte Gerade die Schraubenaxe trifft oder nicht. Von den offenen Schraubenflächen sind ferner drei Hauptfälle zu unterscheiden, welche die Modelle 1—3, von den (in der Technik besonders benutzten) geschlossenen dagegen zwei Hauptfälle, welche die Modelle 4 und 5 darstellen. Bei den offenen Schraubenflächen bezeichnet man ferner als „Kehlschraubenlinie" den Ort, den der Schnittpunkt der Geraden und ihres kürzesten Abstandes mit der Axe bei der Schraubung beschreibt.

Die Erzeugenden der Fläche sind durch schwächere, die Doppellinien durch stärkere Fäden bezeichnet. Es ist ein Gang der Schraubenfläche dargestellt, letztere durch einen coaxialen Cylinder begrenzt.

118. (XX, 1 a.) **Abwickelbare Schraubenfläche.** Der Neigungswinkel der Erzeugenden gegen die Ebene senkrecht zur Axe, den „Normalschnitt", ist gleich dem der Tangente der Kehlschraubenlinie (ihrem Steigungswinkel). Der Schnitt normal zur Axe ergibt die gemeine Kreisevolvente. Die Schraubenlinie des Gestelles ist eine Doppellinie der Fläche. Die Abwickelung eines Flächenstückes ist beigefügt. (20×22 cm.) Mk. 35.—.

119. (XX, 1 b.) **Dieselbe Fläche** aus Carton hergestellt. (20×22 cm.) . . Mk. 5.—.

120. (XX, 2.) Der Neigungswinkel der Erzeugenden gegen den Normalschnitt ist kleiner als der Steigungswinkel der Kehlschraubenlinie. Die Fläche ist **nicht abwickelbar.** Der Normalschnitt ergibt eine verschlungene Kreisevolvente. (20×22 cm.) Mk. 35.—.

121. (XX, 3.) Der Neigungswinkel der Erzeugenden gegen den Normalschnitt ist grösser als der Steigungswinkel der Kehlschraubenlinie. Die Fläche ist **nicht abwickelbar.** Der Normalschnitt zeigt eine geschweifte Kreisevolvente. Die Schraubenlinie des Gestelles ist eine Doppellinie der Fläche. (20×22 cm.) . . . Mk. 35.—.

122. (XX, 4.) **Gerade geschlossene Schraubenfläche** (Wendelfläche), bei der die Erzeugenden die Schraubenaxe senkrecht treffen. (20×22 cm.) . . . Mk. 30.—.

123. (XX, 5.) **Schiefe geschlossene Schraubenfläche,** bei der die Erzeugenden die Schraubenaxe schief treffen. (20×22 cm.) Mk. 30.—.

Der vorletzte Fall kommt (in Verbindung mit cylindrischen Begrenzungen) bei Schrauben mit flachem Gewinde zur Verwendung, der letzte bei Schrauben mit scharfem Gewinde.

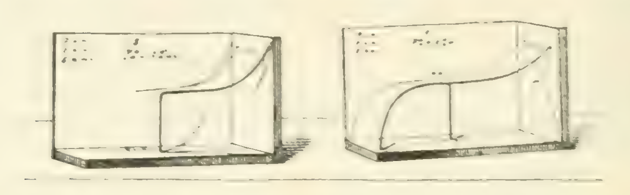
Ganze Serie Mk. 160.—.

NB. Hierher gehören auch die unter Nr. 244 u. 245 (XXVI, 16 u. 17.) aufgeführten Schraubenlinien.

124. (VIII, 5.) **Röhrenschraubenfläche.** Sie ist die Einhüllende aller Kugeln von constantem Radius, deren Centra auf einer Schraubenlinie liegen. Das eine System der Krümmungslinien besteht aus den zur mittleren Schraubenlinie senkrechten Kreisen, das andere aus transcendenten Curven (weiss), die jedoch nicht Schraubenlinien wie die blau gezeichneten sind. Das Problem der Krümmungslinien führt auf Kreisfunctionen, die Asymptotencurven führen dagegen auf elliptische Functionen. Von Assistenten *Th. Kuen* (B), dazu eine Erläuterung (20×30 cm.) . . . . Mk. 13.—.

NB. Andere Schraubenflächen finden sich unter Nr. 205 (V, 3) Schraubenfläche von constantem positiven Krümmungsmass, Nr. 211 (V, 4) Schraubenfläche von constantem negativen Krümmungsmass, und No. 214 (VIII, 7 a).

VI. Raumcurven und abwickelbare Flächen.



125—132. (XI.) **Modelle (aus Draht) der genannten 8 Typen in Bezug auf das Verhalten eines Raumcurven-Elements** von Prof. (Chr. Wiener in Karlsruhe. (11×17 cm.) Beschreibt ein Punkt (*P*) eine unebene Raumcurve, so bewegt sich im Allgemeinen zugleich seine Tangente und die Schmiegungsebene. Dabei kann es sich ereignen, dass von den 3 Elementen eines oder zwei oder alle drei stationär werden. Den 8 verschiedenen Fällen, die hierbei eintreten können, entsprechen 8 Typen eines Elements einer Raumcurve mit im Allgemeinen singulärem Verhalten. Vergl. Ausführung zu Serie XI im I. Teil. . . . Zusammen Mk. 45.—.

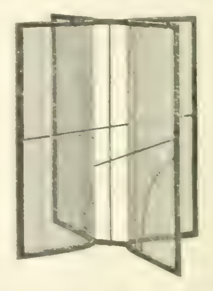
133. (VI, 6 a, b, c, d.) **Die Raumcurven 3. Ord. auf Cylindern 2. Ord.** Je nachdem die unendlich ferne Ebene einer solchen Curve in einem reellen, oder in 3 reellen, oder in einem reellen und 2 zusammenfallenden (Berührung), oder endlich in 3 zusammenfallenden (Osculation) Punkten getroffen wird, unterscheidet man 4 verschiedene Typen, welche cubische Ellipse, Hyperbel, cubisch-hyperbolische Parabel und cubische Parabel genannt werden, und die auf elliptischen, hyperbolischen (Hyperbel und cubisch hyperbolische Parabel) und parabolischen Cylindern liegen. Vergl. Salmon-Fiedler, Geom. des Raumes, II. Teil, pag. 88 ff. (2. Aufl.) Von stud. math. *Lange* modelliert und mit einer Erläuterung versehen (K.) (10,5×6,5 cm.)

Zusammen Mk. 18.—.

134—139. (XXVIII, 1—6.) **Sechs Modelle zur Theorie der cubischen Raumcurve** und ihrer Anwendung in der physiologischen Optik. (K., Sg.) Mit einer Abhandlung. Von Dr. [illegible] Breslau.

Die cubische Raumcurve kann definiert werden als der Ort der Schnittpunkte je dreier entsprechender Ebenen aus drei projectiven Ebenenbüscheln oder als der Ort der Punkte, in deren jedem sich zwei entsprechende Strahlen aus zwei kollinearen Bündeln begegnen, oder endlich als Grundcurve eines besonderen Bündels (Netzes) von Flächen 2. Grades. Aus jedem ihrer Punkte wird sie durch einen Kegel 2. Grades projiciert, aus ihren drei unendlich fernen Punkten also durch drei Cylinder 2. Grades; dabei treten vier gestaltlich ganz verschiedene Typen der Curve auf, die auf Celluloidcylindern in Metallrahmen dargestellt sind.

134. (XXVIII, 1.) **Die cubische Ellipse** mit nur einem reellen unendlich fernen Punkte und einer reellen Asymptote; mit dieser zusammen liegt sie auf einem elliptischen Cylinder. (12×14×40 cm.) Mk. 25.—.



135. (XXVIII, 2.) **Die cubische Hyperbel** mit drei getrennten reellen unendlich fernen Punkten und drei reellen Asymptoten; sie

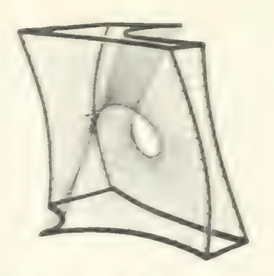
liegt mit jeder der letzteren zusammen auf einem hyperbolischen Cylinder, in dessen Asymptotenebenen sich jedesmal die beiden anderen Asymptoten befinden; die Curve ist auf dem einen dieser drei Cylinder dargestellt. (16×16×40 cm.) . . Mk. 25.—.

136. (XXVIII, 3.) **Die cubische parabolische Hyperbel**, welche die unendlich ferne Ebene in einem reellen Punkt schneidet und in einem zweiten berührt; nach dem ersten geht die einzige Asymptote der Curve, mit der zusammen sie auf einem parabolischen Cylinder liegt; der zweite bestimmt die Richtung der Kanten eines hyperbolischen Cylinders, der unsere Curve ebenfalls trägt. (16×16×40 cm.) . . . . . . Mk. 25.—.

137. (XXVIII, 4.) **Die (räumliche) cubische Parabel**, welche die unendlich ferne Ebene zur Schmiegungsebene hat; durch sie geht nur ein parabolischer Cylinder, auf dem sie in diesem Modell dargestellt ist. (16×16×40 cm.) . . . . . Mk. 25.—.

Durch einen jeden Punkt des Raumes ferner, der nicht auf der cubischen Raumcurve liegt, geht stets eine und nur eine reelle Gerade, die zwei Punkte der Curve trägt; diese beiden Punkte sind entweder reell und getrennt, oder sie fallen in einen reellen Punkt zusammen, so dass die Gerade Tangente der Curve ist, oder endlich sie sind conjugiert imaginär. Die Projection der cubischen Raumcurve aus einem Punkte des Raumes auf irgend eine Ebene ist eine ebene Curve 3. Ordnung, die im ersten Fall einen gewöhnlichen Doppelpunkt, im zweiten einen Rückkehrpunkt und im dritten einen isolierten Doppelpunkt hat. Die Punkte in denen der zweite Fall eintritt, zeigt das folgende Modell.

138. (XXVIII, 5.) **Abwickelbare Fläche der Tangenten der Raumcurve** (Fadenmodell). Diese Fläche trennt die Punkte des ersten Falles von denen des dritten. Sie ist in diesem Modell für die im Modell 134 abgebildete cubische Ellipse dargestellt, be-



grenzt durch ihre Schnittcurven mit vier passend gewählten Ebenen; zur Gratcurve hat sie eben jene cubische Ellipse und enthält die Asymptote derselben, die durch einen schwarzen Faden angedeutet ist. (30×40×40 cm.) . . . . . Mk. 75.—.



139. (XXVIII, 6.) **Horopter**. Eine interessante Anwendung findet die Theorie der cubischen Raumcurve in der physiologischen Optik. Blickt man nämlich mit beiden Augen nach einem Punkte im Raume hin, so vereinigen sich die auf den beiden Netzhäuten entworfenen Bilder dieses Punktes zu einer einzigen Empfindung; man sieht den Punkt einfach. Von den übrigen Punkten des Raumes werden bei dieser bestimmten Augenstellung nur gewisse Punkte einfach gesehen, die anderen aber doppelt, eine Thatsache, deren wir uns allerdings für gewöhnlich nicht bewusst werden. Den Ort der bei einer bestimmten Augenstellung einfach gesehenen Punkte des Raumes nennt man den zu dieser Augenstellung gehörigen Horopter; derselbe ist eine cubische Ellipse, die auf einem Kreiscylinder liegt und eine Symmetrieaxe hat. Das vorliegende Modell nun ist die verkleinerte Darstellung

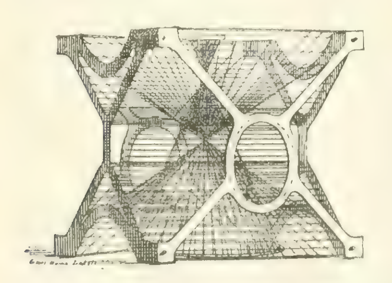
eines wirklichen Falles. Auf einer schwarz gehaltenen Säule sind zwei Kugeln angebracht, welche die Augen bedeuten; eine dritte Kugel stellt den fixierten Raumpunkt und die sie mit den beiden ersten Kugeln verbindenden Stäbe die Blicklinien dar; diese Teile sind aus Kupfer gearbeitet und rotgelb. Die Horoptercurve ist in Messing (hellgelb), ihre Asymptote und ihre Symmetrieaxe in Nickel (weiss) ausgeführt. Durch die beiden starken weissen Linien auf dem Fussbrett sind die Lagen der Medianebene und der Frontalebene angegeben und durch den kleinen schwarzen Ring an der Asymptote die Lage der durch die Kernpunkte gehenden Horizontalebene. Um die Neigung der Asymptote hervorzuheben, ist ihre orthogonale Projection als feine weisse Linie auf dem Fussbrett eingezeichnet. (20×23×47 cm.) . . . . . Mk. 25.—.

Ganze Serie Mk. 160.—.

140. (XXIII, 7.) **Raumcurve 4. Ordnung** mit unendlich fernem isolierten Doppelpunkt; von Prof. Dr. *H. Wiener.*

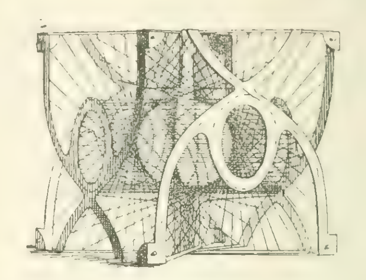
Sie erscheint als Schnitt dreier Cylinder, von denen der eine ein Umdrehcylinder, die beiden anderen parabolische Cylinder sind. Die Cylinder sind in einem Messingrahmen durch Fäden dargestellt. (12×14 cm.) Mk. 3.20.

141—144. (XII, 1—4.) **Vier Fadenmodelle zu der Raumcurve 4. Ord. erster Art und ihrer abwickelbaren Fläche.** Von Prof. Dr. *H. Wiener* in Karlsruhe. Vergl. die Beschreibung bei Serie XII.



141. (XII, 1.) **Erster Fall. Die Curve liegt auf vier reellen Kegeln.** Darstellung der Curve als Schnitt dieser Kegel. (30×30×30 cm.) . . . . Mk. 110.—.

142. (XII, 2.) **Die abwickelbare Fläche der Tangenten dieser Curve.** (30×30×30 cm.) Mk. 110.—.



143. (XII, 3.) **Zweiter Fall. Die Curve liegt auf zwei reellen und zwei imaginären Kegeln.** Darstellung als Schnitt jener beiden. Das Modell zeigt zugleich die a b w i c k e l b a r e Fläche ihrer Tangenten. (30×30×30 cm.) Mk. 110.—.

144. (XII, 4.) **Dritter Fall. Die Curve liegt auf vier imaginären Kegeln.** Darstellung als Schnitt zweier geradliniger Hyperboloide. Das Modell zeigt zugleich die a b w i c k e l b a r e Fläche der Tangenten. (30×27×32 cm.) . . . . . Mk. 70.—.

Ganze Serie Mk. 380.—.

145—151. (XXI, 1—7.) **Fadenmodelle der abwickelbaren Flächen der Raumcurven 4. Ord. zweiter Art.** Von Prof. Dr. *Karl Rohn* in Dresden.

Bei den Raumcurven 4. Ord. z w e i t e r Art, die sich als teilweiser Schnitt eines Hyperboloids mit einer Fläche 3. Ord. darstellen, existiert ein Fundamentaltetraeder; in Bezug auf dieses gruppieren sich die Curvenpunkte zu je vier derart, dass ihre 6 Verbindungslinien die Gegenkanten des Tetraeders paarweise treffen, und dass sie durch die Kanten harmonisch getrennt werden. Drei der Kanten des Tetraeders sind Doppelsecanten der Curve. Das Tetraeder ist zugleich Polartetraeder für das Hyperboloid, auf dem die Curve gelegen ist. In den Modellen 1, 2, 3 u. 4 wurde ein Ro-

tationshyperboloid und seine Axen als Doppelsecanten gewählt. Dreht man die Curve um eine der drei Axen um 180⁰, so nimmt sie wieder die nämliche räumliche Lage ein. Von Bedeutung sind die 4 Punkte (W) mit Wendeberührebenen. Die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche geht durch sie hindurch und sie erscheinen deshalb als Zwickpunkte derselben. Ferner gibt es 4 Curventangenten (T), die die Curve noch in einem weiteren Punkte schneiden. Diese Punkte bilden Spitzen für die Doppelcurve, und längs jener Tangenten durchschneidet die abwickelbare Fläche das Hyperboloid. Dargestellt sind:

145. (XXI, 1.) **Raumcurve 4. Ordnung mit 4 reellen (T) und keinem reellen (W).** Die Trisecanten schneiden die Curve, die ganz im Endlichen liegt, teils in drei, teils in einem reellen Punkte. Die abwickelbare Fläche liegt teils ausserhalb, teils innerhalb des Hyperboloids, das sie längs jener Tangenten durchdringt; ihre Doppelcurve liegt ganz ausserhalb und ruht mit 4 Spitzen auf demselben auf. . . . . . . Mk. 60.—.

146. (XXI, 2.) **Raumcurve 4. Ord. mit reellen (W) und ohne reelle (T).** Die Curve liegt ganz im Endlichen; alle Trisecanten treffen sie nur in einem reellen Punkte. Die abwickelbare Fläche liegt ganz ausserhalb des Hyperboloids; ihre Doppelcurve durchdringt das Hyperboloid in jenen 4 Punkten, welche Zwickpunkte für sie sind. Mk. 50.—.

147. (XXI, 3.) **Raumcurve 4. Ord. ohne reelle (T) und (W).** Die Curve verläuft vier Mal durchs Unendliche. Die Raumcurve projiciert sich für das Auge als ebene Curve mit dreifachem Punkte oder mit drei reellen Doppelpunkten, von denen einer isoliert sein kann. . . . . Mk. 30.—.

148. (XXI, 4.) **Raumcurve 4. Ord. mit zwei Streckungspunkten** (drei consecutive Curvenpunkte in gerader Linie). Diese Curve bildet den Uebergang von XXI, 1 nach 2. Die abwickelbare Fläche zeigt eine Doppelcurve von gleicher Beschaffenheit, wie die gegebene Raumcurve und ausserdem zwei Rückkehrgeraden, nämlich die Tangenten in den Streckungspunkten. Im Fall 1 vereinigen sich diese Rückkehrgeraden mit der Doppelcurve, wobei dann die Spitzen entstehen; im Fall 2 verschwinden sie. Mk. 40.—.

149. (XXI, 5.) **Raumcurve 4. Ord. mit zwei reellen (T) und zwei reellen (W).** Sie läuft zwei Mal durchs Unendliche, kann aber ganz ins Endliche gebracht werden. Von dem Fundamentaltetraeder sind hier nur noch zwei Gegenkanten reell, von denen eine als Axe des Hyperboloids in der Ebene des Kehlkreises gewählt ist. . Mk. 50.—.

150. (XXI, 6.) **Specialfall des vorigen.** Die beiden Punkte mit Wendeebenen fallen mit den Schnittpunkten der beiden schneidenden Curventangenten zusammen. Natürlich ist auch diese Curve nur in Bezug auf eine Axe symmetrisch. Die abwickelbare Fläche besitzt eine dreifache Curve — im Modell ist sie ein Kreis —, die dadurch entsteht, dass im Fall 5 jede Spitze der Doppelcurve mit einem ihrer beiden Durchdringungspunkte (Zwickpunkte der Fläche) zusammenrückt. . . . . . Mk. 45.—.

151. (XXI, 7.) **Raumcurve 4. Klasse,** die aus XXI, 6 durch reciproke Raumtransformation abgeleitet ist; sie liegt auf einem Kreiscylinder und besitzt zwei Spitzen. Mk. 45.—.

Vergl. auch die Erläuterung bei Serie XXI. (Grösse aller Mod. 20×20×20 cm.)

Ganze Serie Mk. 300.—.

152. 153. (XVII, 2.) **Die sieben Haupttypen der ebenen Curven 3. Ord., nach Möbius auf einer Kugel dargestellt.** Vergl. die Modelle der Kegel 3. Ordnung, Nr. 72—78. (XXV, 1—7.)

Diese sphärischen Curven vereinigen die gestaltlichen Eigentümlichkeiten der collinear-verwandten Typen in einem Bilde, während jede ebene Darstellung den Verlauf der Curve im Unendlichen entstellt.

Von den 7 Typen sind drei durch Spaltung eines der 5 Newton'schen Haupttypen entstanden. Sie bestehen aus einem unpaaren

Zug und unterscheiden sich nur durch die Lage der Verbindungslinie der Wendepunkte gegen das Dreieck der Wendetangenten. Sie sind hier auf einer Kugel (Nr. 152) vereinigt. Die andere Kugel (Nr. 153) enthält die Typen mit Oval, mit Doppel-, Rückkehr- und isoliertem Punkt.

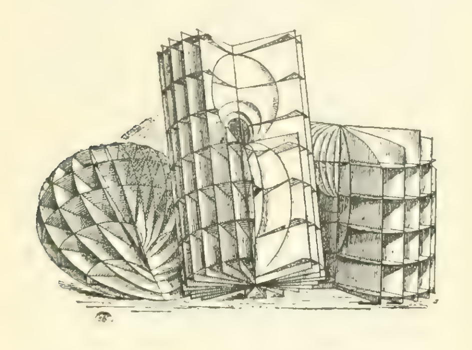
Construiert von stud. *Dollinger* in Tübingen (B). (10 cm.)

Beide Kugeln zusammen Mk. 10.—.

VII. Infinitesimalgeometrie der Flächen.

a) Krümmung der Flächen im einzelnen Punkte.

154—156. (XXII, 1—3.) **Cartonmodelle über die Krümmung der Flächen,** entworfen von Ingenieur *C. Tesch* in Karlsruhe (W).



Sind r_1 und r_2 die Hauptkrümmungsradien einer Fläche in einem gewissen Punkte, so sind für das Gauss'sche Krümmungsmass die drei Fälle zu unterscheiden:

$$\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} \gtreqless 0.$$

Ihnen entsprechend liegen die Krümmungskreise auf derselben Seite der Berührungsebene, oder der eine der Hauptkrümmungskreise ist in eine Gerade übergegangen, oder die Krümmungskreise liegen auf beiden Seiten der Berührungsebene.

Jedes der diese 3 Fälle darstellenden Modelle zeigt ausser 12 Krümmungskreisen noch die Schar der Schnittcurven der von den Krümmungskreisen gebildeten Fläche mit zur Flächennormale senkrechten Ebenen.

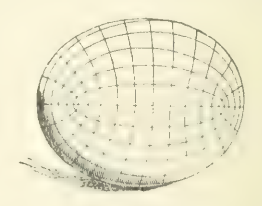
Zusammen Mk. 16.—.

b) Krümmungslinien, insbesondere auf den Flächen 2. Ordnung; confocale Flächen.

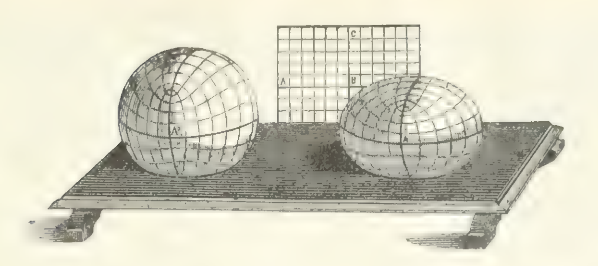
157. (XXIII, 1b.) **Kleines dreiaxiges Ellipsoid mit Krümmungslinien** . . Mk. 2.—.

158. (III, 2.) **Ellipsoid mit Krümmungslinien.** Modelliert, wie auch die übrigen Flächen 2. Ordnung mit Krümmungslinien, von *R. Diesel* in München (B). Nebst zwei erläuternden Abhandlungen.

Die Hyperboloide erster und zweiter Art, welche mit dem Ellipsoid zu demselben confocalen Flächensystem gehören, schneiden aus ihm die Krümmungslinien aus (die Schnittcurven eines confocalen Flächensystems sind für alle 3 Scharen Krümmungslinien). Man kann diese Curven auch dadurch erhalten, dass man in 2 von den 4 Nabelpunkten (den Berührpunkten der zu den Kreisschnitten parallelen Tangentialebenen) die Endpunkte eines Fadens befestigt und ihn vermittelst eines Stiftes anspannt. Lässt man den Stift sich bewegen, so beschreibt er eine Krümmungslinie. Axenverhältnis des Ellipsoids $\sqrt{3}:\sqrt{2}:\sqrt{1}$, grosse Halbaxe 5 cm. (10×6 cm.) Mk. 2.80.



159. (III, 4.) **Dasselbe,** grosse Halbaxe 9 cm. (18×11 cm.) . . . . Mk. 6.80.



160°. (XVI, 1.) **Ellipsoid, welches durch seine Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate geteilt wird.** Von Prof. *Neovius* in Helsingfors. Es sind die 3 Hauptschnitte und 18 Krümmungslinien aufgezeichnet.

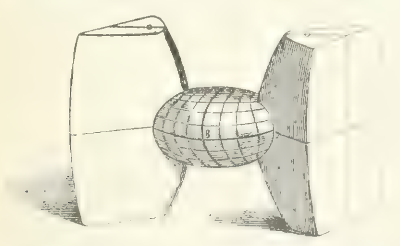
161°. (XVI, 2.) Rechteckige Platte hierzu, mit geraden Linien versehen, welche den Krümmungslinien auf dem Ellipsoid entsprechen.

162°. (XVI, 3.) **Kugel** mit 3 grössten Kreisen und 18 confocalen **sphärischen Kegelschnitten,** welche wiederum den Krümmungslinien des Ellipsoids entsprechen.

Zu den drei Modellen gehört ein gemeinsamer Holzuntersatz.

Zusammen Mk. 30.—.

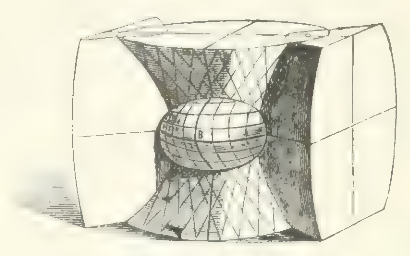
163. (XVI, 6.) **Vereinigung** des vorgenannten Ellipsoids mit einem confocalen einschaligen Hyperboloid . . Mk. 16.—.



164. (XVI, 7.) **Vereinigung** desselben Ellipsoids mit einem confocalen zweischaligen Hyperboloid . . . . Mk. 18.—.

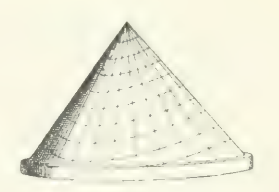
165. (XVI, 9.) **Vereinigung** des Ellipsoids mit einem confocalen einschaligen und einem confocalen zweischaligeu Hyperboloid. Mk. 22.—.

166. (III, 7.) **Einschaliges Hyperboloid mit Krümmungslinien.** (23×23 cm.) Mk. 11.—.



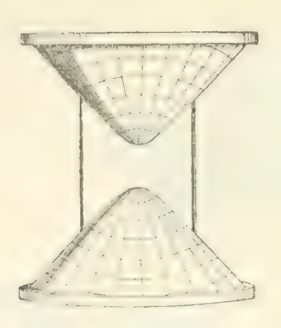
Abbildg. zu 165. (XVI, 9.)

Die Modelle Nr. 163 bis 166 sind von stud. math. *Haussner* in Göttingen (S) hergestellt.

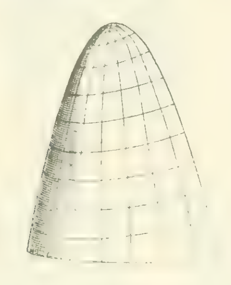


167. (III, 18.) **Elliptischer Kegel mit Krümmungslinien.** Die eine Schar von Krümmungslinien sind die Erzeugenden, die andern sphärische Curven; sie werden durch den Endpunkt eines Fadens beschrieben, dessen anderer Endpunkt in der Spitze befestigt ist. Dieser Kegel ist Asymptotenkegel zu Nr. 166 und 168. (23×13 cm.) Mk. 5.60.

168. (III, 9.) **Zweischaliges Hyperboloid mit Krümmungslinien.** Es besitzt 4 reelle Nabelpunkte. Das eine System von Krümmungslinien, das aus der Fläche durch die Ellipsoide des zugehörigen confocalen Systems ausgeschnitten wird, kann durch dieselbe Fadenconstruction wie beim Ellipsoid construiert werden, das andere durch die



einschaligen Hyperboloide ausgeschnittene aber nicht. (23×13 cm.) . . Mk. 16.40.



169. (III, 12.) **Elliptisches Paraboloid mit Krümmungslinien.** Diese Curven schlingen sich um die 2 reellen Nabelpunkte der Fläche; das geschlossene System lässt sich durch die beim Ellipsoid angegebene Fadenconstruction finden. Diese Fläche gehört vermöge der Gleichung:

$$\frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} + 2z = \lambda$$

einem dreifach orthogonalen System an, das 2 Systeme von elliptischen Paraboloiden, eins nach der positiven, das andere nach der negativen Seite der z-Axe geöffnet, und ein System hyperbolischer Paraboloide enthält. Die Durchdringungscurven dieser Flächen sind Krümmungslinien derselben. (12×20 cm.) . . . . Mk. 6.80.

170. (III, 16.) **Hyperbolisches Paraboloid mit Krümmungslinien** (vergl. Bemerkung zu der vorhergehenden Fläche. (16×12 cm.) Mk. 4.70.

171⁰. (X, 2 b.) **Modell zu Staude's Fadenconstruction des Ellipsoids aus 2 confocalen Flächen zweiten Grades.** Wenn ein geschlossener unausdehnbarer Faden, der um zwei ineinandergefügte confocale Flächen, ein Ellipsoid und ein einschaliges Hyperboloid, herumgeschlungen ist, durch einen beweglichen Punkt derart gespannt wird, dass er beständig jeden der beiden durch das Ellipsoid getrennten Teile des Hyperboloids berührt (sei es in einem Punkt oder längs eines ganzen Curvenzugs), so beschreibt der Punkt ein den gegebenen Flächen confocales Ellipsoid. Der rote Faden legt sich an beide Teile des Hyperboloids längs eines Teiles der Schnittcurve an (erster Fall), der andere, gelbe, nur an den einen Teil, berührt dagegen den andern nur in einem Punkt (zweiter Fall). (20×9 cm.)

172⁰. (X, 2a.) **Modell (aus Draht) zu Staude's Fadenconstruction des Ellipsoids aus den 2 Focalcurven** des zum Ellipsoid gehörigen confocalen Flächensystems. (Specieller Fall der vorigen Erzeugungsweise). Der Apparat gestattet nur das obere vordere Viertel des Ellipsoids zu construieren; dabei muss sich der Faden von unten an die Ellipse, von hinten an die Hyperbel anlegen. Die Länge des Fadens ist gleich der grössten Axe des Ellipsoids, vermehrt um die Differenz der Excentricität der Ellipse und Hyperbel. (20×10 cm.)

Beide Modelle sind von Dr. *O. Staude* construiert. (Vergl. dessen Abhandlung in den Math. Annal. Bd. 20, pag. 147.) Erläuterungen des Verfassers sind beigegeben. Zusammen Mk. 12.—.

173. (XVII, 13.) **Fläche, auf welche das Ellipsoid durch parallele Normalen conform abgebildet wird.** Von Dr. *K. Reinbeck* in Einbeck (S).

Die Fläche wird durch ihre **Krümmungslinien** in unendlich kleine Quadrate geteilt. Mit Hülfe des Modells lässt sich eine Vorstellung gewinnen von der Gestalt derjenigen Flächen, auf welche die übrigen Flächen zweiten Grades durch parallele Normalen conform abgebildet werden . Mk. 12.—.

174⁰. (X, 11 a.) **Bohnenförmiger Körper** mit Symmetrieebenen zur Anstellung von Proben bezüglich des Verlaufes der **Krümmungslinien, Asymptoten- und parabolischen Curven** auf einer Fläche. (14×8 cm.)

175⁰. (X, 11 b.) **Dasselbe** anderer Gestalt (tordierte Bohne). (10×6 cm.)

Zusammen Mk. 1.50

Hierher gehören ferner die Abt. III, a unter Nr. 79 ff. aufgeführten Cycliden, deren Krümmungslinien bekannt sind, die Röhrenschraubenfläche Nr. 124 (VIII, 5), die windschiefe Schraubenfläche Nr. 223 (VIII, 6 c.), die Flächen von constantem positiven Krümmungsmass nach *Kuemper* Nr. 206, 207 (XVII. 3) und die Bianchi'sche Fläche Nr. 212 (VIII, 1).

c) Asymptotencurven und parabolische Curven.

176—187. (X, 10 a—m.) **Modelle von verschiedenen Rotationsflächen mit aufgezeichneten Asymptotencurven.** Man gelangt zu denselben durch die Frage nach solchen Rotationsflächen, deren Asymptotencurven zur Projection auf eine Ebene senkrecht zur Axe gegebene Curvensysteme (logarithmische Linien, Kreise etc.) besitzen; a. bis l. von *Herting* in München berechnet und modelliert. (B).

Zusammen Mk. 80.—.

176⁰. (X, 10 a.) **Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der Parabel** um ihre Scheiteltangente. Gleichung der Fläche

$$z^2 = r \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}),$$

der Projection der Asymptotencurven in Polarcoordinaten $\varphi = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \log r$. (19×13 cm.)

177⁰. (X, 10 b.) **Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der cubischen Parabel** um ihre Wendetangente. Gleichung der Fläche $z^3 = 27 r$, der Projection der Asymptotencurven in Polarcoordinaten $\varphi = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \log r$. (14×14 cm.)

178⁰. (X, 10 f.) **Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der Neil'schen Parabel** um ihre Rückkehrtangente. Gleichung der Fläche $z^3 = 25 r^2$, der Projection der Asymptotencurven in Polarcoordinaten $\varphi = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \log r$. (14×17 cm.)

179⁰. (X, 10 d.) **Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der gleichseitigen Hyperbel** um eine ihrer Asymptoten. Gleichung der Fläche $z \cdot r = 6$, der Projection der Asymptotencurven in Polarcoordinaten $\varphi = \sqrt{2} \log r$. (15×16 cm.)

180⁰. (X, 10 c.) **Rotationsfläche,** deren Gleichung ist $z r^2 = 8$. Gleichung der Asymptotencurven $\varphi = \sqrt{3} \log r$. (15×16 cm.)

181⁰. (X, 10 e.) **Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der logarithmischen Spirale** um ihre Asymptote. Gleichung der Fläche $z = 6 \log r$, der Projection der Asymptotencurven $\varphi = \log r$. (16×11 cm.)

182⁰. (X, 10 k.) **Rotationsfläche, entstanden durch Drehung der Parabel** um eine Parallele zur Axe. Gleichung der Fläche $z = a(r-a)^2$, der Projection der Asymptotencurve $\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{r}{a}}$, (Cardioide). (16×16 cm.)

183⁰. (X, 10 g.) **Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der Parabel** um eine Parallele zur Scheiteltangente. Gleichung der Fläche $z^2 = a^2 (r-a)$, der Projection der Asymptotencurven

$$\varphi = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \log \frac{2(r + \sqrt{r(r-a)}) - a}{a}.$$

(18×15 cm.)

184⁰. (X, 10 h.) **Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der cubischen Parabel** um eine Parallele zur Wendetangente. Gleichung der Fläche $z^3 = a^3 (r-a)$, der Projection der Asymptotencurven:

$$\varphi = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \log \frac{2(r + \sqrt{r(r-a)}) + a}{a}.$$

(18×19 cm.)

185⁰. (X, 10 i.) **Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der Neil'schen**

Parabel um eine Parallele zur Rückkehrkante. Gleichung der Fläche $z^3 = a^3 (r - a)^2$, der Projection der Asymptotencurven

$$\varphi = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \log \frac{2(r + \sqrt{r(r-a)}) - a}{a}.$$

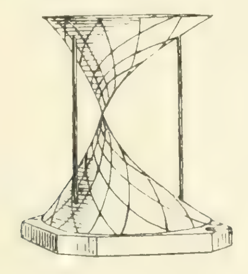
(13×17 cm.)

186⁰. (X, 10 l.) **Rotationsfläche,** deren Gleichung ist

$$z = \frac{1}{2c}\left(\sqrt{c^2 - r^2} - c^2 \operatorname{arc} \cos \frac{r}{c}\right).$$

Die Projection der Asymptotencurven ergibt ein System von Kreisen, die durch denselben Punkt gehen. (14×20 cm.)

187⁰. (X, 10 m.) **Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der Sinuslinie** $z = \cos r$. Das Modell erläutert das Verhalten der Asymptotencurven in der Nähe der parabolischen Curve. Im Allgemeinen setzen die Asymptotencurven auf die parabolische Curve mit Spitzen auf, und nur wenn letztere die Berührungscurve einer Doppeltangentialebene ist, wird sie von den Asymptotencurven berührt. Das in dem Ausdruck für den Bogen auftretende Integral wurde mit Hilfe der Gauss'schen Näherungsmethode ausgewertet. Die aufgezeichneten Kreise bilden die parabolische Curve. Berechnet und construiert von stud. math. *Sievert* in München. (B). (21×5 cm.)



188—191. (XVII, 7 a. b. c. d.) **Verschiedene Typen conischer Knotenpunkte** mit Angabe des Verlaufes der parabolischen Curve und der Asymptotencurven in der Umgebung dieser Punkte. Ausgeführt unter Leitung von Prof. Dr. Dyck und Prof. Dr. Finsterwalder von Professor *A. Sucharda* in Prag.



Berücksichtigt man in der Taylor'schen Entwicklung der Flächengleichung im Knotenpunkt $f(x, y, z) = u_2 + u_3 + \ldots = 0$ die Glieder 2. und 3. Ordnung, so hat man bekanntlich nach der Realität der 6 Schnittgeraden der Kegel $u_2 = 0$ und $u_3 = 0$ vier Hauptfälle zu unterscheiden: 6, 4, 2, 0 dieser Schnittgeraden reell. Zur Darstellung dieser Fälle sind specielle, jedoch hinreichend allgemeine Beispiele ausgewählt. Des Näheren vergl. die Abhandlung von Sucharda, Über die asymptotischen Curven gewisser Flächen dritter Ordnung mit gewöhnlichem Knotenpunkt. Monatshefte für Math. und Physik, VIII. Jahrgang. (Höhe ca. 20 cm.)

Zusammen Mk. 75.—.

192. (II, 2.) **Fläche 3. Ord.** vierter Classe mit 4 reellen conischen Knoten, **auf welche eine Asymptotencurve** (gelb) **aufgezeichnet ist;** sie entspricht dualistisch einer Asymptotencurve der Steiner'schen Fläche (4. Ord., dritter Classe) und ist nach Clebsch (Crelle Bd. 67, S. 9) eine Raumcurve 6. Ord., vierter Classe, die in jedem Knotenpunkt der Fläche einen Rückkehrpunkt besitzt. Von *Bacharach* in München (B). Erläuterung beigegeben. (13×22 cm.) . . . . Mk. 14.—.

NB. Asymptotencurven finden sich auch auf der Römischen Fläche von Steiner Nr. 94 (IX, 3); auf den Rotationsflächen von constantem negativen Krümmungsmass Nr. 208 (II, 4) und 210 (I, 1); auf der windschiefen Schraubenfläche Nr. 223 (VIII, 6 a) und auf der Minimalfläche Nr. 224 (VIII, 2.)

d) Geodätische Linien auf Flächen 2. Ordnung.

193. (I, 4.) **Geodätische Linien auf dem verlängerten Rotationsellipsoid.** Das Problem führt auf elliptische Functionen. Es sind 3 Linien (rot, blau, violett) aufgezeichnet. Construiert und mit Erklärung versehen von stud. math. *Rohn* in München (B). (12×18 cm.) . . . . . Mk. 6.—.

194. (I, 5.) **Geodätische Linien durch die Nabelpunkte** (siehe Bemerkung zu Nr. 158) **eines dreiaxigen Ellipsoids.** Das Problem führt auf elliptische Functionen. Eine geodätische Linie durch den einen Nabelpunkt geht stets auch durch den ihm gegenüber liegenden und nähert sich nach einer Richtung asymptotisch demjenigen Hauptschnitt, der durch die beiden Nabelpunkte geht. (Vgl. Salmon-Fiedler, Raumgeometrie II. Teil, 2. Aufl., pag. 167 ff. Berechnet und construiert von stud. math. *Rohn* (B). Erläuterung beigegeben. (10×18 cm.) Mk. 6.—.

195. (V, 7 a.) **Verlängertes Rotationsellipsoid mit geodätischen Linien und Enveloppen von Systemen solcher, welche von einem Punkt ausgehen.** Diejenigen geodätischen Linien, welche die symmetrisch gestaltete der 2 roten, vierspitzigen Curven umhüllen, kommen von einem Punkte A des Äquators, diejenigen, welche die andere rote Curve berühren, von einem auf einem Parallelkreis gelegenen Punkte A_1. Zwei der 4 Spitzen der zu A_1 gehörigen Enveloppe liegen selbstverständlich in dem durch A_1 gehenden Meridian, die zwei andern auf dem zum Parallelkreis durch A_1 symmetrisch gelegenen Parallelkreis und zugleich auf der geodätischen Linie, welche in A_1 den Parallelkreis durch A_1 berührt. (Vergl. Nr. 197.) (12×8cm.) Mk. 6.50.

196⁰. (X, 12 c.) **Dasselbe in grösserem Massstabe.** Die von einem Punkt A ausgehenden geodätischen Linien bilden eine Enveloppe, die von einem in A befestigten Faden umhüllt wird. (18×12 cm.)

197⁰. (V, 7 b.) **Sphäroid** (abgeplattetes Rotationsellipsoid) **mit geodätischen Linien und Enveloppen** von Systemen solcher, welche von einem Punkt ausgehen. Die Bedeutung und Gestalt der Curven wie in Nr. 195. (17×10 cm.) . . . . Mk. 6.50.

198⁰. (X, 12 b.) **Dasselbe, grösserer Massstab.** Durch einen im Punkte A befestigten Faden kann man die Erzeugung der Enveloppen demonstrieren. (18×13 cm.)

199⁰. (X, 12 a.) **Dreiaxiges Ellipsoid nebst Andeutung der Enveloppe von geodätischen Linien,** welche von einem Punkt ausgehen. Durch den Ausgangspunkt der geodätischen Linien gehen 2 Krümmungslinien; die 4 Spitzen der Enveloppe (auch hier ist sie ein vierspitziger Curvenzug) liegen zu je zweien auf denjenigen Krümmungslinien, welche zu den durch den Ausgangspunkt gehenden beiden symmetrisch liegen. Vgl. Dr. A. v. Braunmühl's Abhandl. in den Math. Annalen, Bd. 20, pag. 557 ff. (19×11 cm.)
Nr. 196, 198 u. 199 zus. Mk. 14.—.

Die Modelle Nr. 195—199 wurden von Dr. *A. von Braunmühl* in München (B) construiert. Vergl. dessen Abhandlung in den Math. Annalen Bd. 14, pag. 553 ff. u. Bd 20. Erläuterung beigegeben.

Geodätische Linien finden sich auch auf den Flächen von constantem Krümmungsmass Nr. 200, 201, 208—210 und von constanter mittlerer Krümmung Nr. 217—221.

e) Flächen von constantem Krümmungsmass und aufeinander abwickelbare Flächen.

Für die Flächen von constantem Krümmungsmass ist das Product der beiden Hauptkrümmungsradien, dessen reciproker Wert nach Gauss gleich dem Krümmungsmass der Fläche in dem betrachteten Punkt ist, an jeder Stelle dasselbe. Nach dem

Vorzeichen dieses Productes unterscheidet man Flächen von constanter positiver oder negativer Krümmung oder von der Krümmung Null. Alle Flächen von gleichem constanten Krümmungsmass sind ohne Dehnung und Schrumpfung auf einander aufbiegbar und in sich selbst verschiebbar, wie z. B. die Ebene oder die Kugel. Man kann auf solchen Flächen daher von Congruenz der Figuren reden, weil man getrennt gelegene Flächenstücke durch Verschiebung in der Fläche selbst zur Deckung bringen und mit einander vergleichen kann. Die notwendige Bedingung zum Aufbau einer Geometrie. im Euklidischen Sinn, ist damit für diese Flächen gegeben; an die Stelle der „Geraden" tritt hier nur die kürzeste d. h. die „geodätische Linie". Die Geometrie auf den Flächen von constanter positiver Krümmung ist die gewöhnliche sphärische Geometrie; die auf den Flächen von constanter negativer Krümmung wird Nicht-Euklidische Geometrie genannt und deckt sich mit der durch Lobatschewsky begründeten, welche des elften Axioms von Euklid entbehrt. Der Unterschied zwischen dieser und der sphärischen hat ein verschiedenes Verhalten der unbegrenzt verlängerten geodätischen Linien zur Folge. (Vergl. die diesbezüglichen Anmerkungen zu den Modellen beider Flächengattungen).

Die nachfolgenden Flächenmodelle sind bestimmt, dem Studium dieser Geometrie zu dienen. Zu diesem Zweck sind einzelnen Nummern verbiegbare Messingbleche von dem Krümmungsmass der Flächen beigegeben, welche jeder beliebigen Stelle einer Fläche von dem gleichen Krümmungsmass, wie es der Streifen besitzt, sich anschmiegen.

Die partielle Differantialgleichung, durch welche diese Flächen definiert sind, wird unter Voraussetzung einer Rotationsfläche zu einer gewöhnlichen integrierbaren und liefert für die Meridiancurve der Fläche die Gleichung

$$z = \int \sqrt{\frac{c - r^2}{r^2 - c \pm t^2}}\, dr;$$

wobei $\pm t^2$ der reciproke Wert des Krümmungsmasses der Fläche ist.

Sowohl für die Flächen positiver wie für die negativer Krümmung erhält man 2 verschiedene Typen, zwischen denen ein Übergangsfall mit einfacheren Eigenschaften liegt (Kugel und Tractrixfläche).

200—202. (V, 2.) **Rotationsflächen von constantem positiven Krümmungsmass** mit geodätischen Linien. Drei Typen mit gleichem Krümmungsmass $= \frac{1}{4{,}33^2}$ (in Centimetermass). Da diese Flächen auf eine Kugel abwickelbar sind und geodätische Linien bei der Abwickelung erhalten bleiben, so treffen sich alle von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien wieder in einem Punkt. Nach Zeichnungen von E. Bour, Journal de l'Ecole Polytechnique, Tome 22 modelliert und mit geodätischen Linien versehen von Assistenten Dr. *P. Vogel* (B).

200. (V, 2 b.) **Spindeltypus**; die Meridiancurve trifft die Axe. (11×7 cm.) Mk. 4.—.

201. (V, 2 c.) **Wulsttypus;** die Meridiancurve der Fläche trifft die Axe nicht. (10×12 cm.) . . . . Mk. 9.—.

202. (V, 2 a.) **Kugel**; Zwischenfall, Radius 4,33 cm. . . . . Mk. 1.—.

Die Flächen von constanter Krümmung sind, als dünne Haut gedacht, wie bereits erwähnt, in sich selbst verschiebbar und auf einander abwickelbar. Man kann dies durch die folgenden biegsamen, auf diese Flächen aufgepassten Streifen von Messingblech erproben.

203⁰. (X, 6 a.) **Flächenstreifen von constanter positiver Krümmung aus Messingblech.** Kugelzone, einem Centriwinkel von fast 90° entsprechend.

204⁰. (X, 6 b.) **Hohle Halbkugel aus Messingblech.** Beide zusammen Mk. 4.50.

205. (V, 3.) **Schraubenfläche von constantem positiven Krümmungsmass,** auf die

vorhergehenden 3 Flächen abwickelbar, indem das Krümmungsmass mit dem der vorhergehenden Flächen übereinstimmt. Die Gleichung der Meridiancurve führt auf elliptische Functionen. Ganghöhe der Schraube 10,9 cm. Schneidet man aus der vorherigen Kugel eine von 2 gleich grossen Parallelkreisen begrenzte Zone (einem Centriwinkel von 90⁰ entsprechend) heraus, so geht diese durch gegenseitige Verschiebung der Endschnitte in diese Schraubenfläche über, wie sich dies mit Hülfe der Kugelzone aus Messingblech zeigen lässt. (24×15 cm.) . . . . . . Mk. 13.—.

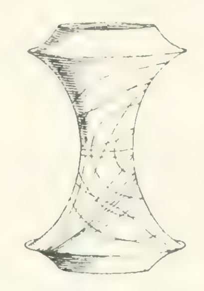
Von stud. math. *Kuen* in München (B). Erläuterung hierzu und auch zu den vorhergehenden Rotationsflächen beigegeben.

206. 207. (XVII, 3.) **Zwei Flächen von constantem positiven Krümmungsmass mit einem System ebener Krümmungslinien.** Die eine (Nr. 206) repäsentiert den allgemeinen, von Enneper zuerst (Göttinger Nachrichten 1868) untersuchten Fall, dass die Coordinaten der Fläche elliptische Functionen von 2 Parametern sind; die andere (Nr.207) den von Kuen (Bayr. Acad. Sitzungsber. 1884) nachgewiesenen besonderen, wo Kreisfunctionen für die Coordinatendarstellung ausreichen. Letzterer entspricht dem Typus der Bianchischen Fläche (Nr. 136) für Flächen von negativem Krümmungsmass.

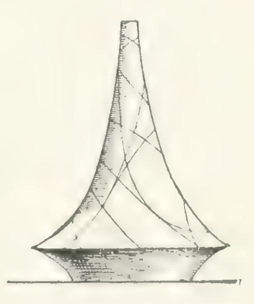
Die Flächen sind beide auf die Kugel Nr. 128 abwickelbar. (16×16×8 u. 16×15×14 cm.) . . . Zusammen Mk. 18.—.

Die Flächen von constantem negativen Krümmungsmass unterscheiden sich wesentlich durch die Eigenschaften ihrer geodätischen Linien von denen positiver Krümmung. Die von einem Punkt ausgehenden Linien treffen sich überhaupt n i c h t mehr. Durch einen Punkt der Fläche gehen u n e n d l i c h v i e l e Linien, die eine gegebene geodätische Linie s c h n e i d e n , z w e i (nach jeder Seite eine) zu ihr p a r a l l e l e (sie im Unendlichen treffende) und u n e n d l i c h v i e l e s i e n i c h t s c h n e i d e n d e. Unter einem geodätischen Kreis versteht man diejenige Curve, die der Endpunkt eines am anderen Endpunkte befestigten auf der Fläche aufliegenden angespannten Fadens beschreibt. — Um Vieldeutigkeit zu vermeiden, hat man sich eine Rotationsfläche als unendlich dünne, über das Modell der Rotationsfläche unendlich oft gewickelte Haut zu denken (als Schraubenfläche von der Ganghöhe Null).

208. (II, 4.) **Rotationsfläche von constantem negativen Krümmungsmass (Kegeltypus),** nebst geodätischen Linien (blau) und einer Asymptotencurve. Von stud. math. *Bacharach* in München (B). Erläuterung beigegeben. (17×17 cm.) . . . . Mk. 9.—.

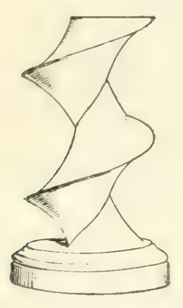


209. (II, 5.) **Ebenso (Hyperboloidtypus.)** Es ist ein System paralleler geodätischer Linien aufgezeichnet (grün), worunter sich 2 (rot) befinden, die sich dem Kehlkreis asymptotisch nähern. Die geschlossenen Curven sind geodätische Kreise. Von stud. math. *W. Dyck* in München. Erläuterung beigegeben. (13×21 cm.) . . Mk. 12.—.



210. (I, 1.) **Rotationsfläche der Tractrix,** durch Umdrehung um ihre Asymptote ent-

standen. Die Tractrix ist durch die Eigenschaft definiert, dass alle Tangenten zwischen dem Berührpunkt und einer Geraden, der Asymptote, constante Länge besitzen. Diese Fläche bildet den Übergang zwischen den beiden vorgenannten Flächen und entspricht der Kugel bei den Flächen constanter positiver Krümmung. Die blau gezeichneten Curven auf ihr sind verschiedene geodätische Linien, die rote ist eine Asymptotencurve, deren Torsion bekanntlich gleich der Wurzel aus dem negativen Krümmungsmass der Fläche an der betreffenden Stelle, also für diese Curve allenthalben dieselbe ist. Von stud. math. *Bacharach* in München (B). Erläuterung beigegeben. (25×18 cm.) Mk. 9.—.



211. (V, 4.) **Schraubenfläche von constantem negativen Krümmungsmass,** deren Meridiancurve die Tractrix ist. Sie ist die einzige Schraubenfläche von der erwähnten Art, in deren Gleichung nicht elliptische Functionen eintreten. (Bei Flächen constanter positiver Krümmung gibt es keine von dieser Eigenschaft). Vergl. U. Dini, Comptes Rendus, Acad. Sc. Paris 1865, I. Sem. pag. 340; Th. Kuen, Berichte der kgl. bayr. Acad. 1884. Von Dr. *P. Vogel* in München (B). Erläuterung beigegeben. (24×15 cm.) . . . . . . Mk. 15.50.

212. (VIII, 1.) **Fläche von constantem negativen Krümmungsmass mit ebenen Krümmungslinien nach Enneper.** Sie entsteht aus der Tractrixfläche von der Krümmung $-\frac{1}{t^2}$



dadurch, dass man auf den Tangenten an ein System von parallelen geodätischen Linien das Stück t in bestimmtem Sinn aufträgt. Die Fläche besitzt eine Ebene und eine räumliche Rückkehrkante mit 2 Spitzen sowie eine Doppelcurve. Das eine System von Krümmungslinien wird von Ebenen ausgeschnitten, welche durch eine (im Modell vertikal gestellte) Gerade hindurch gehen. Das andere System liegt auf Kugeln, deren Mittelpunkte in dieser Geraden liegen. Vergl. Bianchi, Math. Annalen Bd. 16, sowie Enneper, Göttinger Nachrichten 1868; Th. Kuen, Sitzungsberichte der kgl. bayr. Acad. 1884, Heft II. Modelliert von stud. math. *Mack.* Erläuterung hierzu von Assistenten *Th. Kuen* in München (B). (24×18 cm.) . . . . Mk. 16.—.

Die Flächen Nr. 209, 211, 212 besitzen das nämliche Krümmungsmass. Um ihre Abwickelbarkeit auf einander und besonders ihre Verschieblichkeit in sich selbst und die merkwürdigen Beziehungen der Nicht-Euklidischen zur Geometrie des Lobatschewsky zu zeigen, hat man auf dieselben 2 Flächenstreifen (Nr. 213) aus dünnem Messingblech aufgepasst. Schneidet man von einem ein dreieckiges Stück ab, dessen Seiten geodätische Linien (z. B. der Fläche Nr. 209) sind, so lehrt bereits der Augenschein, dass die Summe der Winkel in einem solchen Dreieck kleiner als $2R$ ist.

213. (X, 14.) **Zwei Flächenstreifen von constantem negativem Krümmungsmass** aus biegsamem Messingblech, vom Krümmungs-

mass der Flächen 209, 211, 212. (Siehe die vorstehende Bemerkung) (B). . Mk. 4.—.

214. (VIII, 7 a.) **Schraubenfläche, auf das Rotationsellipsoid Nr. 215 abwickelbar** (nach E. Bour, Journal de l'Ecole Polyt., Bd. XXII). Von Assistenten Dr. *P. Vogel* (B). (12×26cm.) . . . . Mk. 10.50.

215. (VIII, 7 c.) **Rotationsellipsoid,** auf die vorige Fläche abwickelbar (B). (3×9 cm.) Mk. 1.50.

216. (VIII, 7 b.) **Rotationsellipsoid aus biegsamem Messingblech** zur Demonstration der erwähnten Abwickelung. Die durch 2 gleich grosse Parallelkreise begrenzte Zone obigen Ellipsoids geht durch einen leichten Druck in die vorhin erwähnte Schraubenfläche über (B). . . . . Mk. 2.50.

In diesen Abschnitt gehört noch die in der folgenden Abteilung aufgezählte windschiefe Schraubenfläche Nr. 223, welche auf das Catenoid abwickelbar ist und der zugehörige Messingstreifen Nr. 222.

f) Flächen von constanter mittlerer Krümmung, Minimalflächen.

Die Flächen von constanter mittlerer Krümmung sind dadurch definiert, dass die Summe der reciproken Werte ihrer 2 Hauptkrümmungsradien an jeder Stelle denselben Zahlenwert besitzt. Die partielle Differentialgleichung, durch welche sie definiert sind, geht in eine integrierbare totale über, wenn man sich auf Rotationsflächen beschränkt, und zwar erhält man für die Meridiancurve die Gleichung

$$z = \int \frac{r^2 + a_1 a_2}{\sqrt{(a_1^2 - r^2)(r^2 - a_2^2)}} dr.$$

Nach Delaunay (Comptes rendus XIII, 1841) ergibt sich die Meridiancurve dieser Flächen auch als diejenige Curve, die der Brennpunkt eines Kegelschnittes beim Abrollen auf einer Geraden beschreibt, welche dann Rotationsaxe wird. Den 3 Kegelschnitten Ellipse, Hyperbel, Parabel entsprechend, erhält man 3 verschiedene Typen, die von Plateau in seinem Werke „Statique expérimentale et théorique des liquides etc." Onduloid, Nodoid, Catenoid genannt wurden. Nach Laplace werden die Gleichgewichtsfiguren von Flüssigkeiten, welche der Einwirkung der Schwere entzogen sind, von Flächen constanter mittlerer Krümmung begrenzt. Geometrisch lassen sie sich auch als gewisse Parallelflächen zu Flächen von constantem positiven Krümmungsmass definieren. Einen speciellen Fall davon bilden die Minimalflächen, deren mittlere Krümmung Null ist Dieselben haben die Eigenschaft, einen kleineren Flächeninhalt zu besitzen als jede andere benachbarte Fläche, die durch eine beliebige auf ihr geführte geschlossene Randcurve hindurch gelegt wird. Sie ergeben sich mechanisch als diejenigen Flächen, welche die zwischen eine gegebene Randcurve sich einspannende Flüssigkeitshaut (z. B. durch Eintauchen eines Drahtes von der Form der Curve in Seifenlösung annimmt.

Die Minimalflächen werden sowohl durch ihre Krümmungs- wie durch ihre Asymptotencurven in unendlich kleine Quadrate geteilt. (Die Indicatrix ist für diese Flächen eine gleichseitige Hyperbel, deshalb stehen auch die Asymptotencurven aufeinander senkrecht). Zu jeder Minimalfläche gibt es eine zweite, ihre sog. Bonnet'sche Biegungsfläche, welche auf sie derart abwickelbar ist, dass die Krümmungslinien der einen in die Asymptotencurven der andern übergehen. Vergl. Schwarz in Crelle's Journ. Bd. 80.

217—220. (II, 3.) **Drei Typen von Rotationsflächen constanter mittlerer Krümmung** mit geodätischen Linien. Das Verhalten der letzteren ist je nach dem Winkel, unter dem eine den grössten Parallelkreis trifft, ein verschiedenes. Entweder bewegt sie sich zwischen 2 Parallelkreisen (blau) oder sie nähert sich asymptotisch dem Kehlkreis, d. i. Parallelkreis von kleinstem Radius (grün), oder sie läuft über die ganze Fläche hin.

Von stud. math. *A. v. Braunmühl* in München (B). Erläuterung beigegeben.



217. (II, 3a.) **Onduloid.** Die Meridiancurve ergibt sich für $a_1 = 1$ cm., $a_2 = 5,77$ cm. aus der oben angegebenen Gleichung, wenn von den 2 daselbst vorkommenden Vorzeichen das obere (positive) gewählt wird. (12×26 cm.) . . . . Mk. 9.—.

218. (II, 3b.) **Nodoid.** a_1 und a_2 wie oben, aber in der Gleichung ist das untere (negative) Vorzeichen zu wählen. (11×8 cm.) Mk. 8.—.

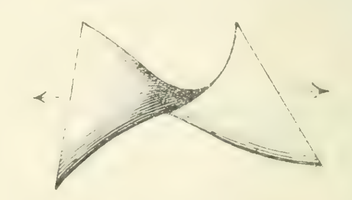
219. (II, 3c.) **Ring des Nodoids,** durch Umdrehung der Schleife der Meridiancurve von b. entstanden. (9×3 cm.) Mk. 2.—.

220. (II, 3d.) **Catenoid,** durch Umdrehung der Kettenlinie um ihre Axe entstanden. Ausser den 3 verschiedenen Typen von geodätischen Linien ist hier auch noch eine Asymptotencurve (gelb) aufgezeichnet. Diese Fläche ist eine Minimalfläche, sie besitzt die constante mittlere Krümmung Null. (16×10 cm.) . . . . Mk. 8.—.

221. (VIII, 6c.) **Catenoid,** grösser, mit aufgezeichneten Krümmungslinien (weiss) und Asymptotencurven (rot). Diese Fläche ist die Bonnet'sche Biegungsfläche zur folgenden windschiefen Schraubenfläche (Nr. 222, 223). Beim Aufbiegen beider auf einander geht der Kehlkreis in die Axe der letzteren über, die Meridiane in die geraden Erzeugenden, Parallelkreise in die Schraubenlinien (B). (20×14 cm.) . . Mk. 10.50.

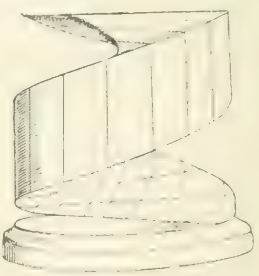


222. (VIII, 6b.) **Catenoid aus biegsamem Messingblech.** Die Umdrehungsfläche der Kettenlinie wird in die windschiefe Schraubenfläche dadurch übergeführt, dass man an dem Messing-



blech die Endpunkte des Kehlkreises fasst und diesen in eine Gerade auszieht, indem man gleichzeitig ein wenig dreht. Der Versuch ist überraschend. In der ersten Gestalt passt das Blech auf das Catenoid Nr. 221, in der zweiten auf die Schraubenfläche Nr. 223. Von *Herting* in München (B). Mk. 2.—.





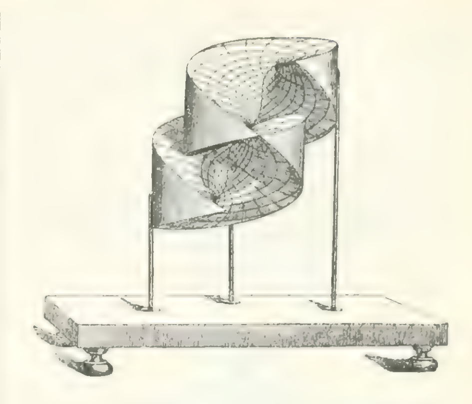
223. (VIII, 6a.) **Windschiefe Schraubenfläche,** Minimalfläche, nebst Krümmungslinien und Asymptotencurven; auf das Catenoid Nr. 221 abwickelbar. Von *Herting* in München (B). (23×22 cm.) Mk. 17.—.

224. (VIII, 2.) **Minimalfläche 9. Ord. nach Enneper** (vergl. Göttinger Nachrichten 1871, pag. 27 ff.). Sie besitzt 2 ebene Doppelcurven 3. Ord., in welchen die aufgezeichneten beiden Scharen von Krümmungslinien (ebenfalls ebene Curven 3. Ord.; die Ebenen derselben sind alle einer Geraden parallel) einen Doppelpunkt besitzen. Die Fläche hat ferner 3 dreifache Geraden, nämlich die unendlich ferne Gerade in der Horizontalebene und die in einer solchen Ebene liegenden 2 roten Geraden. Von den 3 durch diese letztere gehenden Mänteln sind aber 2 imaginär. Die Fläche lässt sich dadurch mit sich selbst zur Deckung bringen, dass man die eine Doppelcurve in die andere verlegt. Ihre Bonnet'sche Biegungsfläche ist sie selbst, d. h. die Fläche kann auf sich selbst aufgebogen werden. Dabei gehen die Krümmungslinien (weiss) in die Asymptotencurven (rot) über. Von *Herting* in München (B). Erläuterung beigegeben. (26×34 cm.) Mk. 21.—.

225. (XVII, 4.) **Catalan'sche Minimalfläche.** Diese Fläche gehört bekanntlich zu den Minimalflächen, welche eine Schar reeller Curven zweiten Grades enthalten, und zwar sind es bei der Catalan'schen Fläche Parabeln. Die Ebenen der Parabeln sind senkrecht zu einer festen Ebene, welche eine Symmetrieebene der Fläche ist. In dieser liegt eine von einer gewöhnlichen Cycloide gebildete geodätische Linie der Fläche. Die Parabeln und deren orthogonale Trajectorien veranschaulichen die Eigenschaft der Fläche, dass sie durch die beiden Curvenscharen in unendlich kleine Quadrate geteilt werden kann. Modelliert von stud. math. *Laine* in Helsingfors unter Leitung von Prof. *Neovius*. (Grösse des Gipskörpers ohne Holzplatte 22×22×14 cm.) . . . Mk. 40.—.

226. (XVII, 1.) **Minimalfläche, welche eine Schar reeller Parabeln enthält, deren Ebenen mit einer festen Ebene des Raumes einen constanten Winkel einschliessen.**

Die Fläche entsteht durch „geometrische Addition" der gewöhnlichen Schraubenfläche

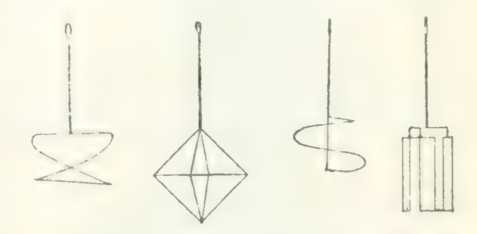


und der Catalan'schen Minimalfläche, d. h. in der Weierstrass'schen Darstellung der Coordinaten setzt sich die Funktion $F(s)$ (Monatsberichte der Berliner Acad. 1886, pag. 618) aus den beiden, die jene liefern, zusammen

$$F(s) = \frac{b}{2s^2} + ia\,\frac{s^2-1}{s^2},$$

wo $i = \sqrt{-1}$; a, b Contante sind. — Ausser den Parabeln sind noch deren Orthogonaltrajectorien angegeben, welche mit jenen die Fläche in unendlich kleine Quadrate teilen, sowie die Scheitelcurve der Parabeln. Jener constante Winkel ist für das Modell 45°.

Modelliert von stud. math. *Tallqvist* in Helsingfors unter Leitung von Prof. *Neovius*. (Grösse des Gipskörpers ohne Holzplatte 21×25 cm.) . . . . Mk. 40.—.



227. (X, 1 a—k.) **Drahtgestelle zur Darstellung von Minimalflächen durch Lamellen von Seifenwasser** nebst einer Anweisung zur Herstellung der Seifenlösung nach Angabe von Plateau, Statique des liquides (B). Näheres siehe Teil I, Serie X. Mk. 12.—.

VIII. Modelle zur darstellenden Geometrie.

a) Hilfsmittel für das geometrische Zeichnen, projective Erzeugung der Kegelschnitte, Reliefperspective.

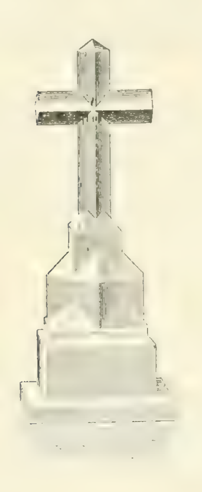


Abbildung von Nr. 229. (XXVI, 2.)



Abbildung von Nr. 232. (XXVI, 5.)



Abbildung von Nr. 235. (XXVI, 8.)

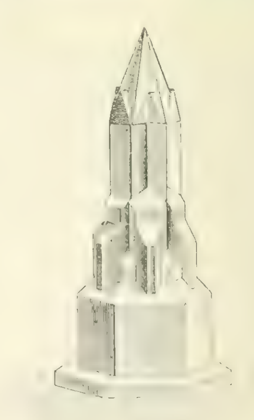


Abbildung von Nr. 237. (XXVI, 10.)

228—237. (XXVI, 1—10.) **Architektonische Polyeder** von Prof. Dr. *Guido Hauck.*

Die Modelle, entstanden durch Zurückführung architektonischer Motive auf ihre polyedrische Grundform, sind von einer gewissen Regelmässigkeit im Aufbau, zeigen aber im Gegensatz zu den elementaren stereometrischen Körpern vielfach ein-

springende Flächenwinkel. Sie dienen zu Übungen im Aufnehmen von Körpern in Grund- und Aufriss und Schattenconstructionen, zur Darstellung in axonometrischen Projectionen, malerischer Perspective u. s. w. Näheres siehe Teil I, S. 62. (Höhe der Modelle 22—26 cm.)

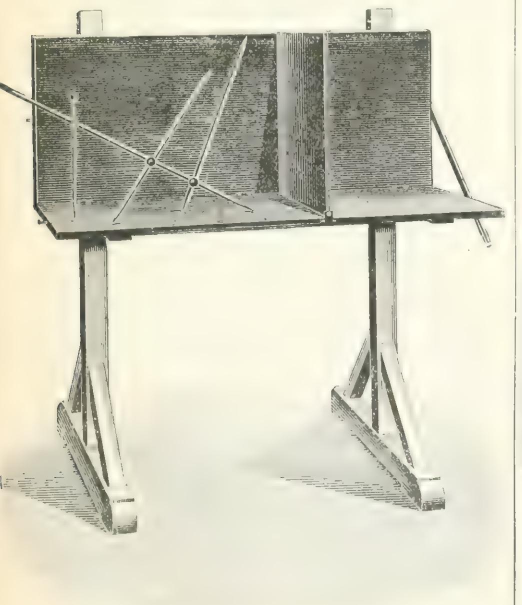
Einzelpreis Mk. 13. .
Ganze Serie Mk. 120.—.

Zum Schutze dieser Modelle sind noch passende **Glasglocken mit Holzuntersätzen** hergestellt, s. S. 61.

Einzelpreis Mk. 2.75—8.50.

Preis der Glocken und Untersätze für die ganze Serie . . . . Mk. 48.—.

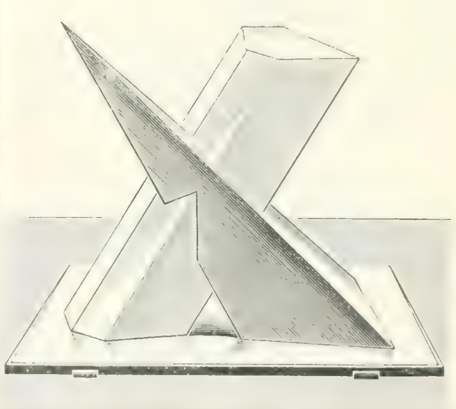
238—246. (XXVI, 11—18.) **Hilfsmittel für den Unterricht in darstellender und projectiver Geometrie** von Prof. Dr. *Fr. Schilling*. Wegen ihrer Einrichtung im Einzelnen und Verwendung beim Unterricht vgl. die Beschreibung der Serie im I. Teil, Seite 63 u. ff.



238. (XXVI, 11 a.) **Grosse Projectionstafel.** Sie ist nach Art der Schulwandtafeln hergestellt, besteht aus zwei Teilen, welche der ersten und der zweiten Tafel des Grund- und Aufrissverfahrens entsprechend leicht im rechten Winkel gegeneinander eingestellt werden können. Der Tafel selbst werden noch zwei kleinere Hilfstafeln beigegeben, von denen die eine die Seitenrissebene, die andere eine allgemein gelegene Ebene darstellt. Endlich gehören zu der ganzen Vorrichtung noch acht Stahlstäbe und zehn Korkkugeln zur Darstellung von Punkten und Geraden. (110×90 cm.) Mk. 70.—.

239. (XXVI, 11 b.) **Festes Gestell** zum Aufhängen der Tafel . . . Mk. 16.—.

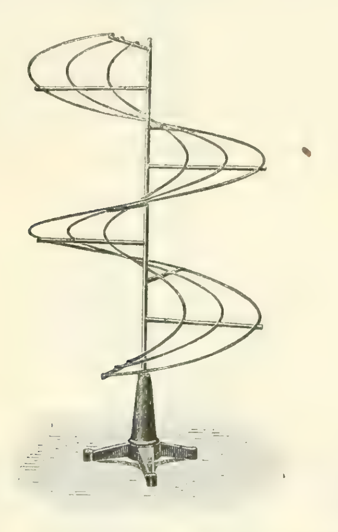
240. (XXVI, 12.) **Kleine Projectionstafel** aus Pappe mit Schiefertafelpapier bezogen. Sie stellt gleichfalls die Grund- und Aufrisstafeln und ihre Umklappung in eine Ebene dar, wobei jedoch die Tafeln über ihre Schnittlinie hinaus sich erstrecken. (52×45 cm.) . . . . Mk. 3.—.



241. (XXVI, 13.) **Durchdringung eines fünfseitigen Prismas und einer dreiseitigen Pyramide** aus Pappe und Holz. Das Prisma ist leicht abzuheben und zeigt dann besonders deutlich die Schnittlinie beider Körper, die auch auf der Pyramide eingezeichnet ist, und den ihnen gemeinsamen Raumteil. (68×48×50 cm.) . . . . . Mk. 20.—.

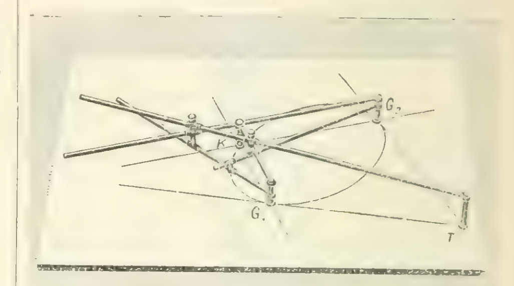
242. (XXVI, 14.) **Gerader Kreiscylinder** mit elliptischem Schnitt, aus Pappe, nebst 10 Bogen Papier, um mit mehreren Perioden die Abwickelung der Schnittcurve, die affine Curve einer einfachen Sinuslinie, darzustellen. Der obere Teil des Cylinders kann überdies gegen den unteren gedreht werden, um die Durchdringung zweier congruenter Cylinder mit sich rechtwinklig schneidenden Axen zu zeigen (Kreuzgewölbe). (42×24 cm.) Mk. 8.—.

243. (XXVI, 15.) **Zwei congruente Ellipsen** mit gemeinsamer kleiner Axe, sich rechtwinklig schneidend, dem vorigen Modell entsprechend, aus Aluminiumdraht. Mk. 10.—.

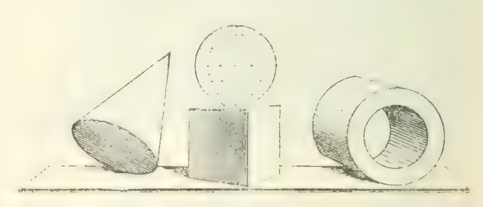


244. (XXVI, 16.) **Drei Schraubenlinien mit derselben Axe und Ganghöhe** und zwar in zwei Windungen. Die rechtsgewundenen Schraubenlinien selbst sind aus Messingdraht, die Axe und die Speichen aus vernickeltem Eisendraht sorgfältig hergestellt. Wird das Modell vor die Wandtafel gehalten, so lassen sich sowohl die senkrecht zur Axe und Tafel ausgeführten Projectionen der verschiedenen Schraubenlinien als affine Curven derselben Sinuslinie, wie ihre schiefen Parallelprojectionen als affine Curven von Cycloiden veranschaulichen. (Höhe 70 cm.) Mk. 60.—.

245. (XXVI, 17.) **Einzelne Schraubenlinie** mit 5 Windungen, aus Aluminiumdraht. (Höhe 35 cm.) a. rechtsgewunden, b. linksgewunden . . . . je Mk. 5.—.



246. (XXVI, 18.) **Allgemeine projective Erzeugung der Kegelschnitte,** speciell einer Ellipse. Das aus verschiedenen Metallen auf einem Reissbrett construierte Modell lässt unmittelbar den speciellen Fall des Pascalschen Satzes erkennen, bei dem zwei Gegenseiten des Sechsecks in Tangenten ausgeartet sind. (70×52 cm.) Mk. 75.—.



247. (VIII, 4.) **Reliefperspectivische Darstellung eines Würfels, einer Kugel, eines Kegels und eines Hohlcylinders,** auf einem Untersatz vereinigt.

Der Augenpunkt befindet sich in der Verlängerung der Rotationsaxe des Kugelreliefs, 56 cm. vor der vorderen Bildfläche des Modells, genauer, vor der Collineationsebene, die durch die obere Kante des Gesimses hindurchgeht, welches die Basis des Modells begrenzt. Die Fluchtebene des Bildraumes ist 28 cm. hinter der Collineationsebene gelegen. Die Tiefe des abgebildeten Raumes beträgt etwa 16,5 cm. Um den gewünschten Eindruck zu erhalten, stelle

man das Modell in gedämpftem Licht vor einer einfarbigen Wandfläche auf und betrachte es durch einen im Augenpunkt angebrachten kleinen kreisförmigen Ausschnitt. Von stud. *Thoma* in München (B). (20×45×5 cm.) . . . . . Mk. 23.—.

b) Projectionen von vier-dimensionalen Körpern.

248—253. (XV, 1—6.) **Drahtmodelle mit Seidenfäden der sechs regelmässigen vier-dimensionalen Körper**, in den dreidimensionalen Raum projiciert, von Dr. *V. Schlegel* in Hagen i. W.

Vergl. Schlegel, Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde, Nova Acta d. Kais. Leop. Carol. Akademie, Bd. 44, Nr. 4. Der Serie ist eine erläuternde Abhandlung von Schlegel beigegeben.

248. (XV, 1.) **Fünfzell**, d. h. regelmässiges vier-dimensionales Gebilde, begrenzt von 5 regelmässigen congruenten Tetraedern. Das Projectionsmodell besteht aus einem regelmässigen Tetraeder, welches symmetrisch in 4 Tetraeder zerlegt ist. Alle Körper sind, wie auch in den übrigen Modellen, für welche alle folgenden Bemerkungen gelten, durch ihre Kanten dargestellt, und zwar teils in Draht, teils in Seide. Ein prinzipieller Unterschied zwischen den Draht- und den Seidenkanten besteht nicht; die abwechselnde Verwendung beider Stoffe ist in erster Linie durch technische Gründe bedingt. Jedoch dient dieselbe auch dazu, eine bessere Übersicht über die Schichtungsverhältnisse der Teilkörper zu geben. Die an dem vier-dimensionalen Körper befindlichen Ecken, Kanten, Flächen und Körper kommen in den Projectionsmodellen genau in derselben Anzahl und Anordnung zur Anschauung, wie sie einer der unsrigen analogen Gesichtswahrnehmung im vierdimensionalen Raume von einem bestimmten Augenpunkte aus erscheinen würden. Die Modelle enthalten, abgesehen von ihrer Bedeutung für die Geometrie des vierdimensionalen Raumes, auch die Lösung der rein stereometrischen Aufgabe: ein gegebenes homogenes Polyeder auf alle Arten homogen in gleichartige Polyeder zu zerlegen, und treten dadurch in Beziehung zur Theorie der räumlichen Configurationen. (Kante des äusseren Tetraeders 6 cm.) Mk. 1.20.

249. (XV, 2.) **Achtzell**, begrenzt von 8 congruenten Würfeln. Das Modell besteht aus einem in 7 Hexaeder zerlegten Würfel; 6 dieser Hexaeder bilden die äussere Schicht der Teilkörper und gruppieren sich symmetrisch um das siebente (einen Würfel), welches den Kern bildet, und demnach im vierdimensionalen Raume dem äusseren Würfel gegenüber liegen würde. (Kante des äusseren Würfels 6 cm.) . . . . Mk. 4.50.

250. (XV, 3.) **Sechzehnzell**, begrenzt von 16 congruenten regelmässigen Tetraedern. Ein regelmässiges Tetraeder ist in 15 Tetraeder zerlegt, von welchen 14 die äussere Schicht bilden und sich symmetrisch um ein inneres, den Kern bildendes regelmässiges Tetraeder gruppieren. (Kante des äusseren Tetraeders 8 cm.) . . . . . Mk. 4.—.

251. (XV, 4.) **Vierundzwanzigzell**, begrenzt von 24 congruenten regelmässigen Oktaedern. Ein regelmässiges Oktaeder ist in 23 Oktaeder zerlegt. Diese gruppieren sich symmetrisch in zwei Schichten um einen Kern (regelmässiges Oktaeder), von denen die äussere 14, die innere 8 Oktaeder enthält. (Kante des äusseren Oktaeders 13 cm.) Mk. 18.—.

252. (XV, 5.) **Sechshundertzell**, begrenzt von 600 congruenten regelmässigen Tetraedern. Ein regelmässiges Tetraeder ist in 599 Tetraeder zerlegt. Diese lagern symmetrisch in 5 aufeinander folgenden Schichten, welche, von aussen nach innen gezählt, 56, 164, 218, 144, 16 Tetraeder enthalten, um ein in der Mitte befindliches Kerntetraeder. (Kante des äusseren Tetraeders 69 cm.) Mk. 120.—.

253. (XV, 6.) **Hundertzwanzigzell**, begrenzt von 120 congruenten regelmässigen Dodekaedern. Ein regelmässiges Dodekaeder ist in 119 Dodekaeder zerlegt, welche in 4 aufeinander folgenden Schichten symmetrisch um ein in der Mitte befindliches Kerndodekaeder gelagert sind. Die 4 Schichten enthalten, von aussen nach innen gezählt, 12, 32, 42, 32 Dodekaeder. — (Kante des äusseren Dodekaeders 21,5 cm) Mk. 120.—.

Über diese Projectionskörper, sowie über ihren Zusammenhang mit den regulären Gebietsteilungen des Raumes und der Theorie der Transformations-Gruppen vergl. noch Hess, Ueber perspectivische Dreiecke und Tetraeder, Math. Annalen 1886; Schlegel, Über congruente Raumteilungen, Hoppe's Arch. 1891; Schoute, Voordracht over de regelmatige lichamen in ruimte van meer dimensies, Utrecht 1891; Goursat, Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace, Ann. de l'Ecole Normale 1889.

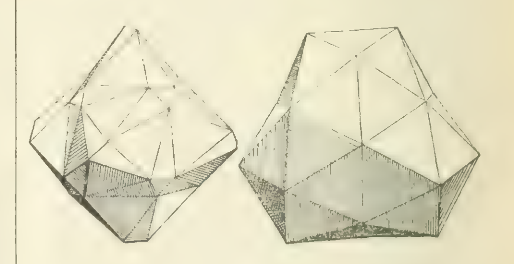
254. (XV, 7.) **Projectionsmodell des vier-dimensionalen vierseitigen Prismas** und seiner Zerlegung in vier inhaltsgleiche Fünfzelle. Drahtmodell mit Seidenfäden. Von Dr. *V. Schlegel* in Hagen i. W.

Durch Parallelverschiebung eines Dreiecks in der Ebene, wobei die Ecken parallele Strecken beschreiben, entsteht die ebene Projection eines dreiseitigen Prismas. In analoger Weise erhält man durch Parallelverschiebung eines Tetraeders im Raume die drei-dimensionale Projection des entsprechenden vier-dimensionalen Prismas. Und wie dort durch 3 Diagonalen der das Prisma begrenzenden Parallelogramme die Zerlegung desselben in 3 inhaltsgleiche Tetraeder zur Anschauung gebracht wird, so hier durch 6 Diagonalen der an der Begrenzung des vier-dimensionalen Prismas vorkommenden Parallelogramme die Zerlegung desselben in 4 inhaltsgleiche Fünfzelle, die in der von dem betreffenden Projectionsmodell bekannten Form zur Anschauung kommen. Die Kanten des Projectionsmodells sind durch Draht, die 6 die Teilung angebenden Diagonale durch Seidenfäden dargestellt. (Seitenkante des Prismas 11 cm.) . . . . Mk. 4.—.

Vergl. hierzu Schlegel, Sur un théorème de géométrie à 4 dimensions, Comptes rendus de l'Association franç. pour l'avancement des Sciences, (Congrès de Toulouse, 1887.)

255—259. (XV, 8—12.) **Ansichten, Netze und Modelle aus Cartonpapier** zu den Drahtmodellen der zwei letzten **regelmässigen vier-dimensionalen Körper.** (Zu Nr. 5 Sechshundertzell, und Nr. 6 Hundertzwanzigzell.) Nach Zeichnungen von Dr. *V. Schlegel* in Hagen i. W.

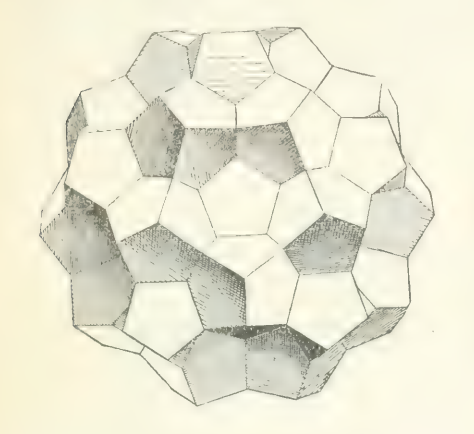
Der Einblick in die gesetzmässige Zusammensetzung der beiden aus 599 Tetraedern und 119 Dodekaedern bestehenden Projectionskörper wird bedeutend erleichtert, wenn man sich die verschiedenen Körperschichten, aus denen diese Gebilde bestehen, der Reihe nach von aussen nach innen abgelöst, oder umgekehrt von innen nach aussen angesetzt denkt. Man erhält dann verschiedene Polyeder von bemerkenswerter Gestalt, deren Oberfläche jedesmal die Grenze zweier Körperschichten darstellt. — In den Drahtmodellen kommen von diesen Polyedern nur die Kanten als Drahtkanten zur Anschauung, in den Cartonmodellen



dagegen auch die Flächen. Ausserdem gestatten die letzteren Modelle im Gegensatz zu den ersteren die Betrachtung jedes einzelnen Polyeders, ungestört von den

übrigen. Eine vergleichende Betrachtung desselben Polyeders am Carton- und am Drahtmodell wird also auch das Verständnis des letzteren erleichtern.

Die zum Drahtmodell Nr. 5 gehörigen Cartonmodelle zeigen (von innen nach aussen gerechnet) das 24-Flach, 68-Flach (beide von oktaedrischem Typus), ferner das



innere 76-Flach, aus dem vorigen durch Aufsetzen von 16 Tetraedern entstehend, (wodurch der oktaedrische Typus in den tetraedrischen verwandelt wird), das äussere 76-Flach und das 40-Flach. — Die Cartonmodelle zu Nr. 6 zeigen in gleicher Reihenfolge das innere und äussere 132-Flach und das 72-Flach.

Die Netze der Cartonmodelle, von denen jedes aus einer Anzahl getrennter congruenter Stücke besteht, dienen zur Selbstanfertigung der Cartonmodelle.

Den in je einem Hefte vereinigten Ansichten der Cartonmodelle sind auch die Netzstücke in je einem Exemplare beigegeben.

255. (XV, 8.) Zwei Hefte mit lithographischen Ansichten und Netzen. Mk. 4.—.

256. (XV, 9.) 5 Carton-Modelle zu Nr. 5. Mk. 20.—.

257. (XV, 10.) Netze zu Nr. 5. Mk. 1.50.

258. (XV, 11.) Drei Carton-Modelle zu Nr. 6. . . . . Mk. 20.—.

259. (XV, 12.) Netze zu Nr. 6. Mk. 2.50.

Preis der ganzen Serie Nr. 248—259 Mk. 300.—.

IX. Functionentheorie.

260—262. (XVII, 10, 11, 12.) **Modelle Riemann'scher Flächen** (S.), nämlich

260. (XVII, 10.) **Einfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche mit einem Windungspunkt I. Ord.** (zweiblättrig.) Mk. 2.—.

261. (XVII, 11.) **Desgl. mit einem Windungspunkt 2. Ord.** (dreiblättrig). Mk. 2.—.

262. (XVII, 12.) **Dreifach zusammenhängende Fläche mit einer in sich zurückkehrenden Begrenzungslinie** . . Mk. 2.—.
Zusammen Mk. 5.—.

263—272. (XIV, 1—10.) **16 Modelle zur Darstellung von Functionen einer complexen Veränderlichen.** Ausgeführt unter Leitung von Prof. Dr. *Walther Dyck.*

Um den Verlauf einer Function einer complexen Veränderlichen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen und ebenso den Gesamtverlauf gewisser Typen von Functionen einer complexen Veränderlichen durch eine räumliche Darstellung zu veranschaulichen, sind in der bekannten Weise sowohl der reelle als auch der imaginäre Teil der Functionswerte über der Ebene des complexen Argumentes als Ordinaten aufgetragen. So wird jede Function eines complexen Argumentes durch zwei mit R und I bezeichnete Flächen versinnlicht, deren gleichzeitige Betrachtung ein Bild des Functionsverlaufes liefert. Zur genaueren Characteristik der Wertsysteme sind auf den Flächen

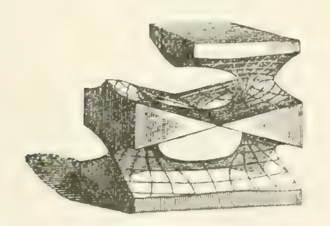
Niveaulinien in gleichen Abständen (die Einheit des Massstabes = 3 cm.) und die zugehörigen Orthogonaltrajectorien aufgetragen. Dabei stehen die jedesmal zusammengehörigen Modelle R und I in der Beziehung zu einander, dass die Projection der Niveaulinien und Falllinien der einen Fläche in die Ebene des complexen Argumentes mit der Projection der Falllinien, bezw. Niveaulinien für die andere Fläche in eben diese Ebene identisch ist.

Die Serie enthält folgende Darstellungen:

263—265. (XIV, 1, 2 u. 3) veranschaulichen das Verhalten einer Function in der Nähe von Verzweigungsstellen und zwar:

263. (XIV, 1 a u. b.) Für die Function $w^2 = z^2 - 1$. Die beiden über der z-Ebene entstehenden Flächen R und I sind Flächen 4. Ord., die sich zweiblättrig über dieser Ebene ausbreiten. Die $z = +1$ und $z = -1$ entsprechenden Punkte sind die Verzweigungspunkte. Von Lehramts-Candidaten *A. Wildbrett* (D). (12 × 12 × 12 cm.) je Mk. 10.—.

264. (XIV, 2 a u. b.) Für die Function $w^2 = z^4 - 1$. Die zugehörigen, zweiblättrig über der z-Ebene ausgebreiteten Flächen sind von der 8. Ord. und bei $z = +1$, $z = -1$, $z = +i$, $z = -i$ verzweigt. Von Lehramts-Candidaten *Wildbrett* (D). (12×12×12 cm.) je Mk. 14.—.



265. (XIV, 3.) Für die Function $w^4 = 1 - z^4$. Hier sind die beiden Flächen R und I identisch. Man hat in unserer Darstellung eine vierblättrig über der z-Ebene sich ausbreitende Fläche (von der 16. Ord.), für welche jedesmal zwei übereinanderliegende Punkte als reeller, bezw. imaginärer Teil der Function w einander zugeordnet sind. Die Punkte $z = \pm 1$ sind Verzweigungspunkte, in denen alle vier Blätter der Fläche zusammenhängen, bei $z = \infty$ sind die Blätter paarweise verzweigt. Von Lehramtscandidaten *Wildbrett* (D). (12×12×12 cm.) Mk. 16.—.

266. 267. (XIV, 4 u. 5.) sollen das Zusammenrücken zweier logarithmischer Unendlichkeitspunkte zu einem einfachen algebraischen zur Anschauung bringen.

266. (XIV, 4.) $w = \frac{1}{z}$. Von Lehramts-Candidaten *Wildbrett* (D). (12×12×12 cm.) Mk. 11.—.

267. (XIV, 5 a u. b.) $w = \frac{1}{2\varepsilon} \log \frac{z + \varepsilon}{z - \varepsilon}$. Von Assistenten *Burkhardt* und stud. math. *Kleiber* (D). (12×12×12 cm.) . . je Mk. 11.—.

Die Periode des Logarithmus $= i\frac{\pi}{\varepsilon}$ kommt selbsverständlich nur auf der dem imaginären Teile von w entsprechenden Fläche zur Geltung. Sie ist im Modell $= 4i$ angenommen. Für lim $\varepsilon = o$ findet der Uebergang der Flächen 5. in 4. statt, wobei die bei 5. in $z = \pm \varepsilon$ gelegenen „Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung" zusammenrücken, während gleichzeitig die Periode $i\frac{\pi}{\varepsilon}$ unendlich gross wird.

268. (XIV, 6.) $6w = e^{\frac{1}{6z}}$ versinnlicht den einfachsten wesentlich singulären Punkt, und zwar ist der reelle Teil der Funktion durch:

$$u = \frac{1}{6} e^{x'} \cos y'$$

$$\text{(wo } x' = \frac{x}{6(x^2 + y^2)},\ y' = \frac{-y}{6(x^2 + y^2)},$$

$$z = x + iy \text{ gesetzt ist)}$$

dargestellt, während der imaginäre Teil

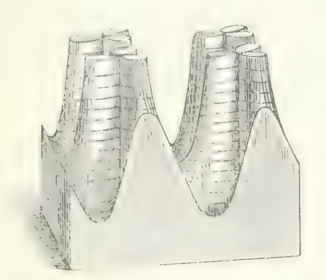
$$v = \frac{1}{6} e^{x'} \sin y'$$

durch eine Transformation der (x, y) Ebene durch reciproke Radien aus ersterem herzuleiten ist. Von stud. math. *Kleiber* (D). (17×18×15 cm.) . . . . . Mk. 18.—.

269—272. (XIV, 7—10.) Die Modelle dienen zur Veranschaulichung des Verlaufes der **elliptischen Functionen** $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ **in der Weierstrass'schen Normalform.** Es wurden dabei die beiden besonderen Fälle für die Darstellung gewählt, für welche in der cubischen Gleichung

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

einmal $g_3 = 0$, dann $g_2 = 0$ ist; sie sind zugleich Repräsentanten der beiden Functionsklassen, für welche die Discriminante G der obigen Gleichung positiv, bezw. negativ ist.



269. 270. (XIV, 7a, b. u. 8.) Hier ist $g_2 = 4$, $g_3 = 0$ gewählt. Dann ergeben sich für die Perioden ω_1 und ω_3 der elliptischen Functionen die Werte

$$\omega_1 = 1{,}311\,,\ \omega_3 = 1{,}311\,.\,i = \omega_1\,.\,i.$$

Die Symmetrie der Flächen innerhalb des Periodenquadrates (es sind jedesmal vier solcher modelliert) ist ausser durch die Relationen

$$\wp(-u) = \wp(u),\ \wp'(-u) = -\wp'(u)$$

durch die hier speciell geltenden Beziehungen

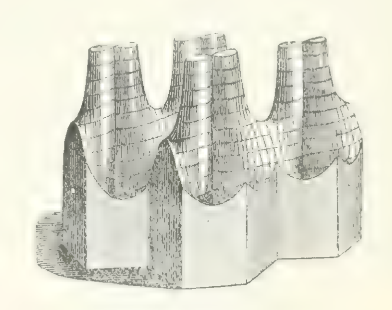
$$\wp(iu) = -\wp(u)$$

und

$$\wp'(iu) = i\,\wp'(u)$$

bezeichnet. Die letztere Formel zeigt zugleich, dass für $\wp'(u)$ in diesem Falle das den imaginären Teil darstellende Modell der Form nach identisch ist mit dem für den reellen Teil, und nur seiner Lage nach durch einen Winkel von 90° gedreht erscheint. Die Modelle kennzeichnen ebenso wie die folgenden Nr. 9 und 10 in charakteristischer Weise das Verhalten einer Function in der Umgebung eines zweifachen [für $\wp(u)$] bezw. dreifachen [für $\wp'(u)$] Unendlichkeitspunktes. Neben diesen treten in den Modellen für $\wp(u)$ noch gewisse „Sattelpunkte" — den Werten, für welche $\wp'(u) = 0$ wird, entsprechend — besonders hervor; und ebenso sind in den Modellen für $\wp'(u)$ in den Punkten, für welche $\wp''(u) = 0$ wird, Sattelpunkte vorhanden. Von Assistenten *Burkhardt* und Lehramtscandidaten *Wildbrett* (D). (16×16×16 cm.)

Nr. 7a u. 7b je Mk. 32.—, Nr. 8 Mk. 36.—.



271. 272. (XIV, 9a, b. u. 10a, b.) Hier sind die Constanten $g_2 = 0$, $g_3 = 4$ zu Grunde gelegt, für welche die Perioden ω_2 und ω_3 die Werte

$$\omega_2 = 1{,}2143,\ \omega_3 = 0{,}6072 + 1{,}0516\,i = e^{\frac{\pi i}{3}}\,\omega_2$$

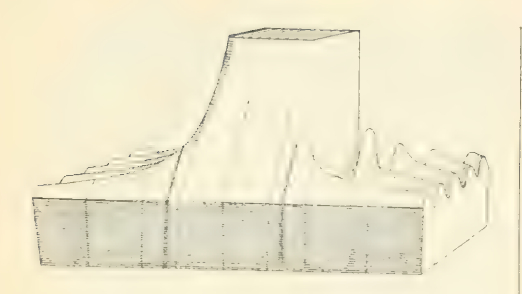
erhalten. Weiter hat man für die Bezeichnung der in den Flächen ersichtlichen Symmetrien der Relationen:

$$\wp(\varepsilon u) = \varepsilon^4\,\wp(u)$$
$$\wp'(\varepsilon u) = \varepsilon^3\,\wp'(u),$$

wo ε eine sechste Einheitswurzel bezeichnet. Von Assistenten *Burkhardt* und Lehramts-Candidaten *Wildbrett* (D). (15×22×16 cm.)

Nr. 9a. u. 9b. je Mk. 35.—.
Nr. 10a. u. 10b. je Mk. 38.—.

Den Modellen ist ein erläuternder Text beigefügt und 5 Figurentafeln, in welchen die auf den Flächen verzeichneten Niveaulinien und Falllinien in ihrer Projection auf die Ebene des complexen Argumentes dargestellt sind.



273. (V, 1.) **Darstellung der elliptischen Function** $\varphi = am(u, k)$ **durch eine Fläche.** φ wurde vertikal, k und u horizontal aufgetragen (Massstab für k-Achse wurde $\frac{3}{2}$ mal so gross als der für die 2 andern Grössen genommen). Für $k^2 < 1$ genügen zur Construction des Modelles die Legendre'schen Tabellen, und in diesem Intervall erstreckt sich die Fläche auch in vertikaler Richtung ins Unendliche. Zur Construction des Modells für die Werte $k^2 > 1$ muss man das elliptische Integral

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

in ein anderes solches Integral mit einem Modul $\lambda^2 < 1$ transformieren, am besten durch die Annahme $\lambda^2 = \frac{1}{k^2}$. Es ergibt sich dann, dass im Intervall $k^2 > 1$ das Modell in vertikaler Richtung sich nicht ins Unendliche erstreckt, sondern eine endliche Höhe besitzt, die um so kleiner wird, je grösser k^2 ist. Modelliert und mit einer Erläuterung versehen von *Th. Kuen* und *Chr. Wolff* (B). (19×25×35 cm.) Mk. 18.—.

274—276. (XVII, 5.) **Orthogonalsysteme auf der Kugel,** ausgeführt von Assistenten *J. Kleiber* (D). (Durchmesser der Kugel 15 cm.) Die Modelle geben durch eingeritzte schwarzgefärbte Linien dargestellte quadratische Einteilungen auf der Kugel.

a. u. b. bei zwei aufeinander senkrechten Kreissystemen mit zwei getrennten, bezw. zusammenfallenden Polen.

Zusammen Mk. 26.—.

c. bei zwei Scharen von aufeinander senkrechten Loxodromen. . . . Mk. 8.50.

Vgl. Klein-Fricke, Elliptische Modulfunctionen, Bd. I (Leipzig 1890) Seite 165 ff.

277—279. (XVII, 6.) **Die den regulären Polyedern entsprechenden regulären Gebietseinteilungen auf der Kugel** (D). (Durchmesser 9 cm.) Die Modelle geben durch eingeritzte schwarzgefärbte Linien und durch wechselseitige Färbung der Dreiecke

a. den Tetraedertypus (Einteilung in 24 Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$); Mk. 5.70.

b. den Octaedertypus (Einteilung in 48 Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$); Mk. 7.—.

c. den Icosaedertypus (Einteilung in 120 Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$); Mk. 8.—.

Bezüglich der gruppentheoretischen und functionentheoretischen Bedeutung dieser drei Modelle sei auf das Werk von F. Klein, Vorlesungen über das Icosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom 5. Grade (Leipzig 1884) verwiesen, woselbst auch die weitere Litteratur genannt ist.

X. Mechanik und Kinematik.

280. (V, 6.) **Die Kettenlinie auf der Kugel.** (Vergl. die Abhandlung von Clebsch in Crelle's Journal, Bd. 57, pag. 104 ff.). Die beiden auf der Kugel vereinigten Typen entsprechen dem Fall, wo das elliptische Integral sich auf ein Kreisintegral reduciert; in den Bezeichnungen der genannten Abhandlung

$$\varrho \sin \varepsilon = 1, \text{ a) } \varrho = \frac{3}{4}, \text{ b) } \varrho = \frac{5}{4}.$$

Durch eine Schnur von Glasperlen lassen

sich die Curven leicht experimentell prüfen. Berechnet von Assistenten *Fischer* in München (B). (Grösse 9 cm.) . . . . Mk. 8.—.

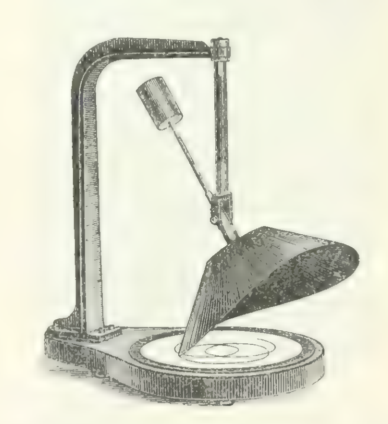
281. (II, 6.) **Bahncurve eines schweren Punktes auf der Kugel (also die des sphärischen Pendels.)** Es ist der Fall dargestellt, wo der oberste (Ausgangs-) Punkt der Bahn sich in der Höhe des Mittelpunktes der Kugel befindet; die Anfangsgeschwindigkeit ist so gross gewählt, dass die Bahncurve sich nach 3 Perioden schliesst. Auch ist der geometrische Ort der untersten Punkte der verschiedenen Ortslinien angegeben, welche verschieden grossen Anfangsgeschwindigkeiten im Anfangspunkt entsprechen. Die Berechnung der Bahn u. s. w. ist von stud. math. *Schleiermacher* ausgeführt (B). (18×14 cm.) . . . . Mk. 11.—.

282—284. (XXIX, 1—3.) **Drei Modelle zur Kreiseltheorie,** aus Metall gearbeitet. Von Dr. *Hermann Grassmann* in Halle a. S.

Eine jede Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt lässt sich nach Poinsot auffassen als ein Fortrollen des mit dem Körper fest verbundenen Polhodiekegels auf dem im Raume festliegenden Herpolhodiekegel. Beide Kegel haben ihren Scheitel im Drehpunkte des Körpers, und ihre Berührungslinie bildet für jeden Augenblick die instantane Drehaxe des Körpers. Trägt man noch vom Drehpunkte aus auf jeder Erzeugenden der beiden Kegel eine Strecke ab, welche durch Länge und Sinn die momentane Winkelgeschwindigkeit veranschaulicht, so erhält man als geometrischen Ort der Endpunkte auf dem Polhodiekegel die „Polhodiecurve", auf dem Herpolhodiekegel die „Herpolhodiecurve". Beide Curven wickeln sich dann ebenfalls bei der Bewegung des starren Körpers aufeinander ab. Regelt man dabei zugleich diese Abwickelung in der Weise, dass ihre Winkelgeschwindigkeit in jedem Augenblick der Länge der auf der Drehaxe abgetragenen Strecke entspricht, so wird die Rotationsbewegung des Körpers vollkommen getreu nachgeahmt.

Bei dem kraftfreien starren Körper ist der Polhodiekegel ein Kegel zweiter Ordnung, der die Hauptträgheitsaxen des Körpers zu Hauptaxen hat, und die Polhodiecurve ein Zweig einer Raumcurve vierter Ordnung, welche aus dem Polhodiekegel durch ein mit ihm coaxiales Ellipsoid ausgeschnitten wird. Die Herpolhodiecurve dagegen ist eine im Raume festliegende ebene Curve und wird erzeugt, wenn man den Polhodiekegel längs der Polhodiecurve abschneidet, seinen Scheitel im Raume festhält und dann den Kegel mit seiner Randcurve unter Ausschluss des Gleitens auf der Herpolhodieebene abrollen lässt. Dabei ergeben sich drei verschiedene Bewegungsformen:

282. (XXIX, 1.) Wenn nämlich der Polhodiekegel die Axe des kleinsten Trägheitsmomentes umschliesst, erfolgt sein Abrollen auf dem Herpolhodiekegel epicycloidisch. Mk. 100.—.



283. (XXIX, 2.) Wenn der Polhodiekegel die Axe des grössten Trägheitsmomentes umschliesst, so ist sein Abrollen pericycloidisch. . . . . . Mk. 100.—.

284. (XXIX, 3.) Der dritte Fall ist der Übergangsfall, in welchem der Polhodiekegel in ein (reelles) Ebenenpaar ausgeartet ist. . . . . Mk. 70.—.

Ganze Serie Mk. 265.—.

Den Modellen ist die Abhandlung beigegeben: *H. Grassmann*, Die Drehung eines

kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt. Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. 48. 1903.

285–288. (XXIV, 1–4.) **Kinematische Erzeugung der allgemeinen cyclischen Curven,** aus Metall und Glas gearbeitet, von Prof. *Fr. Schilling* in Göttingen. Den Modellen liegt die Definition zu Grunde: Eine allgemeine cyclische Curve wird von einem Punkte *M* eines Kreises beschrieben, wenn dieser auf einem festen Kreise abrollt. Jede solche cyclische Curve kann indess in dieser Weise durch zwei verschiedene Kreispaare erzeugt werden, die sich dadurch unterscheiden, dass im einen Falle der als Scheibe gedachte bewegliche Kreis das Centrum des festen nicht bedeckt, im anderen Falle bedeckt.



285. (XXIV,1.) zeigt uns die drei Arten der **Epitrochoiden**, verschlungene, gestreckte und gespitzte Epitrochoide, erzeugt als solche mit freiem Centrum. . . . . Mk. 56.—.

286. (XXIV,2.) gibt dieselbe verschlungene **Epitrochoide** wie beim vorigen Modell, jedoch erzeugt als solche mit bedecktem Centrum; daneben ist auch die gespitzte Epitrochoide hinzugefügt, die sich als völlig verschieden von der des ersten Modells zeigt. Mk. 67.—.

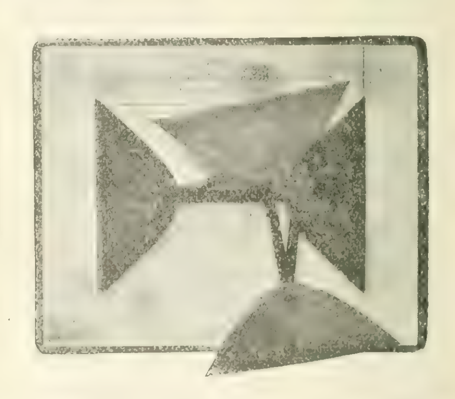
287. (XXIV,3.) zeigt die drei Arten der **Hypotrochoiden,** die verschlungene, gestreckte und gespitzte Hypotrochoide, erzeugt als solche mit freiem Centrum. . Mk. 59.—.

288. (XXIV, 4.) stellt dieselbe gestreckte **Hypotrochoide** dar, jetzt erzeugt als solche mit bedecktem Centrum, daneben wird noch von einem Punkte des beweglichen Systems eine Epitrochoide im festen System beschrieben (Umkehrung der Bewegung). . Mk. 64.—.

289–291. (XXIV, 5–7.) **Kinematische Erzeugung specieller cyclischer Curven,** aus Metall und Glas gearbeitet, von Prof. *Fr. Schilling* in Göttingen.

289. (XXIV, 5.) Erzeugung von **Ellipsen und Strecken** durch Abrollung eines Kreises in einem solchen von doppeltem Radius. Mk. 59.—.

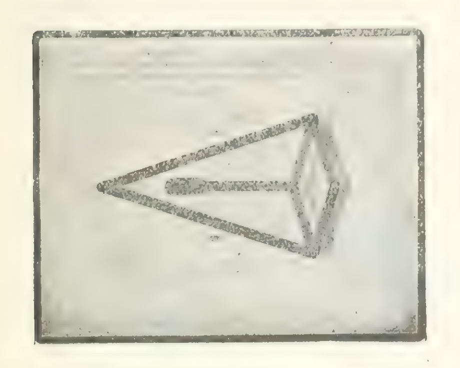
290. 291. (XXIV, 6. u. 7.) veranschaulichen die Erzeugung der verschlungenen, gespitzten und gestreckten **Kreisevolventen,** bez. **Cycloiden** durch Abrollung einer Geraden auf einem Kreise, bez. eines Kreises auf einer Geraden. . . . Mk. 66.— u. Mk. 58.—.



292. 293. (XXIV, 8 u. 9.) **Gleichläufiges und gegenläufiges Zwillingskurbelgetriebe,** aus Metall gearbeitet, von Prof. *Fr. Schilling* in Göttingen. Sie entstehen aus einem ein Antiparallelogramm bildenden Gelenkviereck, wenn eines der beiden kleineren oder grösseren Glieder als „Steg" festgehalten wird; denn die beiden dem festen benachbarten Glieder, die „Kurbeln", vermögen sich im ersten Falle in gleichem, im zweiten

im entgegengesetzten Sinne zu drehen. Die bei der Bewegung auf einander abrollenden Polbahnen sind zwei congruente Ellipsen oder Hyperbeln. Mk. 20.— u. Mk. 24.—.

294—296. (XXIV, 10—12.) **Genaue Geradführungen,** aus Metall gearbeitet, von Prof. *Fr. Schilling* in Göttingen.



294. (XXIV,10.) **Inversor von Peaucellier** (erfunden 1864). Er besteht aus einem Gelenkrhombus *A, B, C, D* und zwei (an den Gegenecken *C* und *D*) angreifenden gleichen, mit dem anderen Endpunkte wieder gelenkig mit einander verbundenen Gliedern $PC = PD$. Wird das Gelenksystem bei festgehaltenem Punkte *P* deformiert, so sind die Punkte *A* und *B* einander entsprechende Punkte derjenigen Transformation durch reciproke Radien, deren Centrum *P* und deren Potenz $PC^2 - AC^2$ ist. Je nach der Einstellung des Modells wird der Punkt *A* auf einem durch den festen Punkt *P* gehenden oder auf einem anderen Kreise geführt; dementsprechend beschreibt der Punkt *B* eine Strecke oder einen Kreisbogen mit sehr grossem Radius. Die analogen Bemerkungen gelten auch für die beiden folgenden Modelle. . . Mk. 22.—.

295. (XXIV, 11.) **Inversor von Hart** (erfunden 1874). Er besteht aus einem Antiparallelogramm, dessen Seiten von einer Parallelen zu den Diagonalen in den Punkten *Q, R, S, T* geschnitten werden. Drei dieser Punkte haben dann Beziehung zu einander wie soeben die Punkte *P, A, B*.

Mk. 22.—.

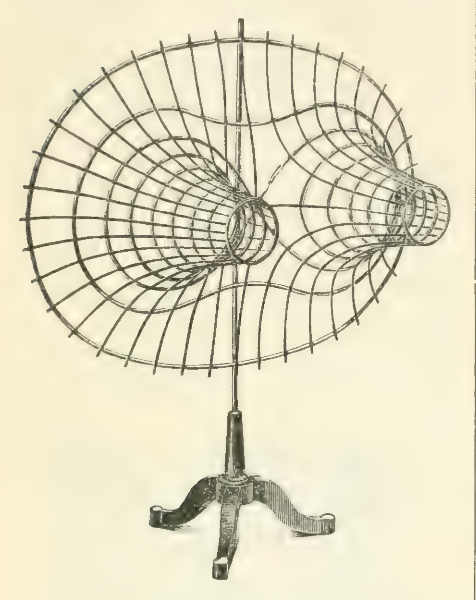
296. (XXIV, 12.) **Inversor von Sylvester-Kempe** (1875), eine Verallgemeinerung des vorigen. Auf jeder Seite des Antiparallelogramms haben wir in richtiger Weise ähnliche Dreiecke aufzusetzen, deren freie Ecken wieder mit *Q, R, S, T* bezeichnet seien. In der Grenze nehmen sie eben die Lage wie beim Modell 11 an; demgemäss stehen sie wieder zu einer Transformation durch reciproke Radien in nächster Beziehung. Hiermit im Zusammenhange steht der Satz, dass bei jeder Deformation des Gelenksystems die 4 Punkte *Q, R, S, T* stets ein Parallelogramm mit constanten Winkeln und constantem Inhalt bilden. . . Mk. 28.—

XI. Mathematische Physik.

(Elektricität, Optik, Elasticität, Wärmelehre.)

297—299. (XXVII, 1—3.) **Drei räumliche Drahtmodelle elektrischer Aequipotential- und Kraftlinien.** Von Prof. *O. Wiener* in Leipzig. Die Modelle stellen die Verteilung des Potentials in einer Ebene dar, in welcher 1) ein elektrischer Massenpunkt, 2) zwei gleichnamige und gleichwertige, 3) zwei ungleichnamige und gleichwertige elektrische Massenpunkte gegeben sind. Trägt man in jedem Punkte senkrecht zur Ebene das Potential auf, so erhält man eine Fläche, die als topographische Fläche aufgefasst mit ihren Niveau- und Falllinien, beziehungsweise die Aequipotential- und Kraftlinien darstellt; diese Linien sind bei den Modellen beziehungsweise durch weisse und rote Drähte wiedergegeben. Der Zusammenhang der beiden Arten von Linien kann

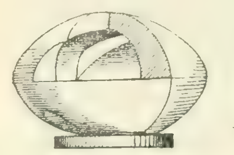
auch experimental veranschaulicht werden, indem man mit einer in grösserer Entfernung aufgestellten, der Linsen entblössten Bogenlampe die mit ihren Niveauflächen aufrecht

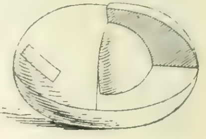


gestellten Drahtmodelle beleuchtet und ihren Schatten auf einen dahintergestellten, zu den Niveauflächen parallelen Schirm auffängt. Da wo die topographische Fläche am steilsten, ein fallender Körper also die grösste Beschleunigung erfahren würde, liegen die Projectionen der Niveaulinien am dichtesten gedrängt, als elektrische Aequipotentiallinien aufgefasst, zeigen sie durch ihr enges Aneinanderliegen die Grösse der elektrischen Kraft an. Diese kann ausserdem noch durch die Dichtigkeit der Kraftlinien erkannt werden, die in unmittelbarer Nähe der gedachten elektrischen Massenpunkte unter gleichen Winkeln auslaufend angenommen wurden. Legt man die Modelle um, so dass die Lichtstrahlen parallel den Niveauflächen auffallen, so projicieren sich diese als gerade gleichweit abstehende Linien. (Höhe 85 cm.) . . . . Nr. 1 Mk. 40.—.
Nr. 2 u. 3 je Mk. 80.—.

300. (VI, 3.) **Wellenfläche für optisch einaxige Krystalle mit negativer Doppelbrechung.** Ein Ausschnitt des Sphäroids zeigt die Kugel, welche mit jenem zusammen die Wellenfläche bildet. Das Axenverhältnis 8,8 : 7,8 ist ungefähr das des Kalkspathes (B). (8×9 cm.) . . . . Mk. 4.—.

301. (X, 7.) **Dasselbe für optisch einaxige Krystalle mit positiver Doppelbrechung.** Ein Ausschnitt der Kugel zeigt das verlängerte Rotationsellipsoid. Das Axenverhältnis entspricht ungefähr dem des Zinnobers (B). (9×9 cm.) . . . . Mk. 4.—.





302. (VI, 1.) **Fresnel'sche Wellenfläche für optisch zweiaxige Krystalle,** längs eines Hauptschnittes zerlegbar, so dass der innere Mantel in den Hohlraum des äussern eingefügt werden kann. Sie ist eine Fläche 4. Ord. und Klasse (eine Kummer'sche Fläche, vergl. Abt. III, b.), besitzt 4 reelle conische Knotenpunkte und ebensoviele längs Kreisen berührende Doppeltangentialebenen (die 12 andern sind imaginär). Man erhält diese Fläche aus dem folgenden Ellipsoid dadurch, dass man auf den im Mittelpunkt errichteten Normalen zu Centralschnitten (Ebenen durch den Mittelpunkt) die 2 Hauptaxen dieser Schnittcurven (Ellipsen) nach beiden Seiten hin abträgt. Vrgl. Salmon-Fiedler, Geom. des Raumes, II. Tl., 4. Cap. (B). (12×8 cm.) Mk. 9.—.

303. (VI, 2.) **Ellipsoid hierzu,** aus dem die eben genannte Wellenfläche auf die angegebene Weise hervorgeht. (12×6 cm.) Mk 4.—.

304. (VI, 4.) **Wellenfläche für optisch zweiaxige Krystalle in einzelnen Octanten** mit den sphärischen und ellipsoidischen Curven (die also bezw. durch Kugeln und Ellipsoide ausgeschnitten werden). Auf jedem der beiden Mäntel ist das eine System

sphärisch, das andere ellipsoidisch. Auf dem Modell sind ferner die Nabelpunkte angegeben. Die Oeffnungen markieren die Richtung des zugehörigen Strahls. Von Rector Dr. *Böklen* in Reutlingen, nebst einer Erläuterung. (24×9 cm.) . . . Mk. 8.50.

305. 306. (XVII, 8a. u. b.) **Darstellung der Gestaltsänderungen einer schwingenden Saite** (Fortpflanzung stehender Wellen), a) für die Klaviersaite, b) für die Violinsaite. Von Oberlehrer Dr. *Schellenberg*, Mülheim a. d. Ruhr. (K.)

Für die Differentialgleichung der schwingenden Saite $\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dx^2}$ hat d'Alembert die allgemeine Lösung $z = f_1(x+t) + f_2(x-t)$ angegeben, unter f_1, f_2 beliebige Functionen ihrer Argumente verstanden. Mit ihr kann jedem beliebigen Anfangszustand der unbegrenzten Saite entsprochen werden. Denkt man sich nun den Anfangszustand einer auf beiden Seiten eingespannten Saite von der Länge l über die Endpunkte hinaus symmetrisch im Bezug auf sie ins Unbegrenzte fortgesetzt, so entsteht eine Aufgabe für die unbegrenzte Saite, deren Lösung in der Längsrichtung der Saite die Periode $2l$ hat. Eine halbe Periode derselben ist gleichzeitig die Lösung für die begrenzte Saite. Die Modelle stellen die Lösungen dar, die den a) bei der Klaviersaite, b) bei der Violinsaite gegebenen Anfangszuständen entsprechen: erstere erhält durch den Anschlag mittelst des Hammers im getroffenen Stück eine gewisse Geschwindigkeit, letztere wird mit dem Finger oder durch den Strich des Violinbogens in einem Punkte gezupft, sodass sie eine einfach gebrochene Linie darstellt. Um die Ableitung der Lösung durch das oben angedeutete Symmetrieprinzip klar hervortreten zu lassen, kommen in den Modellen in der Längsrichtung der unbegrenzt gedachten Saite 2 volle Perioden zur Darstellung, in der Richtung der Zeit t, wo sich ebenfalls die Periode $2l$ einstellt, 3 halbe Perioden. (33×26×7 cm.) Preis für 8a Mk 16.—, für 8b Mk. 20.—.

307—309. (XVII, 9a. b. c.) **Wärmeströmung in einem Stabe** (a, b) **und in einem Ringe** (c). Von Oberlehrer Dr. *Schellenberg*, Mülheim a. d. Ruhr (K).

307. (XVII, 9a.) $F_1(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}}$ veranschaulicht den Temperaturverlauf in einem unbegrenzten Stabe von der Anfangstemperatur 0, dem in einem Punkte eine gewisse Wärmemenge zugeführt worden ist. Durch zweckmässige Überlagerung solcher Functionen kann man jedem beliebigen Anfangszustand im unbegrenzten Stab gerecht werden.

308. (XVII, 9b.) $F_2(x, t) = \frac{x \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2t \cdot \sqrt{t}}$ stellt den Temperaturverlauf in einem ebensolchen Stabe dar unter der Voraussetzung, dass in einem Punkte 2 Störungen der ersten Art von entgegengesetzt gleicher Intensität an einander gerückt seien. Durch Hinzunahme dieser Function kann man auch für den begrenzten Stab die allgemeine Lösung aufstellen. — Die Functionen F_1 und F_2 werden als Hauptlösungen 1. und 2. Art für den Stab unterschieden.

309. (XVII, 9c.) $F(x, t) = \vartheta_3\left(\frac{x}{l}, \frac{i\pi t}{l^2}\right)$ für $l = 2$ gibt über den Temperaturverlauf in einem unbegrenzten Stab Aufschluss, dem in Abständen von der Länge l gleiche Wärmemengen zugeführt sind; es handelt sich also um eine Überlagerung unendlich vieler Hauptlösungen der ersten Art. Die Function hat hinsichtlich der Veränderlichen x die Periode l; im Modell kommen 3 solche Perioden zur Darstellung. Jede einzelne Periode bedeutet offenbar gleichzeitig eine Hauptlösung 1. Art für einen Ring vom Umfang l. (28×17×18 cm.)

Preis für 9a Mk. 16.—, für 9b Mk. 18.—. für 9c Mk. 20.—.

XII. Krystallstructur.

(Reguläre Gebietsteilungen des Raumes.)

310—321. (XIX, 1—12) **Modelle zur Darstellung von regulären Gebietsteilungen des Raumes.** Von Professor Dr. *A. Schoenflies* in Göttingen. Die Serie besteht aus 2 Typen, wovon 10 zu grösseren Blöcken zusammengesetzt sind.

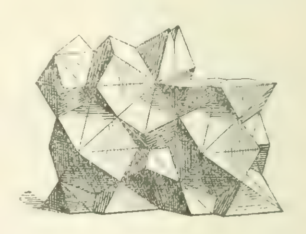
Vermöge jeder Gruppe von Transformationen des Raumes in sich (die sich aus Translationen, Drehungen um Axen und Spiegelungen zusammensetzen) zerfällt der Raum in endliche Bereiche, die bei diesen Operationen ineinander übergehen. Die Form der Bereiche kann mannigfaltig gewählt werden; hier sind sie ebenflächig begrenzt. — Gleichwertig sind alle Punkte des Raumes, die in Folge der Operationen einer Gruppe aus einem gegebenen Punkt hervorgehen. Ein „Fundamentalbereich“ hat in seinem Inneren von allen gleichwertigen Punkten nur einen; die Punkte der Oberfläche dagegen gruppieren sich paarweise, zu jedem Stück der Oberfläche gehört ein ihm gleichwertiges, das an den Modellen kenntlich gemacht ist.

Drehungsaxen und Symmetrieebenen, die der Transformationsgruppe angehören, können nicht in das Innere des Fundamentalbereiches dringen, sie gehören vielmehr der Oberfläche an.

An den vorliegenden Modellen sind mehrere Fundamentalbereiche zu einem Raumbereich (Stein) vereinigt, der nun entweder allein zur Ausfüllung des ganzen Raumes benutzt werden kann (wie in den Modellen 1—6), oder aber mit einem ihm symmetrisch gleichen aber nicht congruenten zusammen dies bewirkt (7—9). Um das Zusammenfügen zu erleichtern, sind einige Steine zu einem Block vereinigt.

Siehe des Urhebers Abhandl. über Translationsgruppen in Math. Ann. Bd. 28, 29, 34 sowie Schoenflies, Krystallsysteme und Krystallstructur, Leipzig 1891.

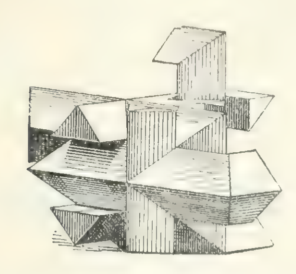
Nr. 1—6. Alle Fundamentalbereiche sind congruent, und zwar stellen Nr. 1—5 überdies Körper dar, die eigene Symmetrie besitzen. Unter den Operationen der zu ihnen gehörigen Gruppe sind daher stets solche, die den Bereich in sich überführen. Für Nr. 6, der ohne eigene Symmetrie ist, ist dies dagegen nicht der Fall.



310⁰. 311⁰. (XIX, 1, 2.) Sie besitzen je eine zweizählige Symmetrieaxe und zwei durch sie laufende Symmetrieebenen; sie zerfallen in je vier Teile, deren jeder der sechste Teil eines Würfels ist, und zwar so, dass sie je die Hälfte einer Würfeldiagonale als Kante enthalten. Jeder dieser Teile kann selbst Fundamentalbereich einer Raumteilung sein.

312⁰. (XIX, 3.) Der Bereich besitzt eine vierzählige Symmetrieaxe und vier durch sie hindurchgehende Symmetrieebenen. Er zerfällt daher in acht teils congruente, teils spiegelbildlich gleiche Einzelkörper, die selbst Fundamentalbereiche sind. Sie repräsentieren je den zwölften Teil eines Würfels, und zwar einen solchen, der eine ganze Würfeldiagonale als Kante besitzt.

313⁰. (XIX, 4.) Der Bereich besteht aus den gleichen acht Einzelkörpern, wie Nr. 3, ist aber so aus ihnen aufgebaut, dass ihm nur eine zweizählige Symmetrieaxe und zwei durch sie gehende Symmetrieebenen zukommen.



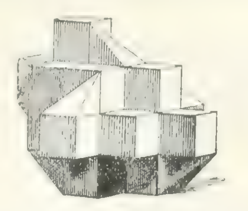
314⁰. (XIX, 5.) Der Bereich besitzt nur eine Symmetrieebene. Sie scheidet ihn in zwei Einzelkörper, die ebenfalls Fundamentalbereiche darstellen können. Jeder von ihnen ist wieder der sechste Teil eines Würfels, der übrigens von den vorhergehend benutzten Würfelteilen verschieden ist.

315⁰. (XIX, 6.) Ein Bereich ohne eigene Symmetrie. Er zerfällt aber noch in zwei congruente Einzelkörper, die selbst Fundamentalbereiche darstellen; jeder von ihnen ist der dritte Teil eines Würfels.

Nr. 7—9 gehören zu Raumteilungen, deren Bereiche teils congruent, teils spiegelbildlich gleich sind. Unter den Operationen der zugehörigen Gruppe gibt es keine, die einen Bereich in sich überführt.

Diejenigen Seitenflächen eines Steins, an welche congruente Steine angrenzen, sind durch ein **c**, diejenigen, an welche symmetrisch gleiche Steine anstossen, durch ein **s** kenntlich gemacht. Ferner sind gleichwertige Flächen mit Buchstaben von gleicher Farbe versehen.

316⁰. 317⁰. (XIX, 7, 8.) Diese Bereiche bestehen noch aus zwei Einzelkörpern, deren



jeder Fundamentalbereich einer Raumteilung sein kann. Sie stellen wieder je den sechsten Teil eines Würfels dar.

318⁰. (XIX, 9.) Der Bereich zerfällt nicht mehr in Einzelbestandteile, die selbst Fundamentalbereiche sein können. Er stellt zugleich den einfachsten Typus derjenigen Bereiche dar, welche der zugehörigen Gruppe von Operationen entsprechen.

319⁰. (XIX, 10 a, b, c.) Diese drei sind Fundamentalbereiche von Raumteilungen, die zu einer Translationsgruppe gehören. Sie werden daher von lauter Paaren paralleler Flächen begrenzt. Die verschiedenen Formen gehen durch leicht sichtliche Umsetzungen ineinander über.

320⁰. 321⁰. (XIX, 11, 12.) Sie sollen erkennen lassen, wie mannigfache Formen sich aus einer Grundform ableiten lassen. Als Grundform ist ein Bereich gewählt, der durch Zusammenfügung von zwei Bereichen Nr. 4 entsteht. Nr. 11 zeigt eine zweite Halbierung dieses Körpers, Nr. 12 eine Zerfällung in vier congruente Bestandteile, die von den bisher benutzten verschieden sind. Aus ihnen lassen sich durch Zusammensetzung wieder neue Formen ableiten, u. s. w.

(Blöcke ca. 13×15×10 cm.)
(Einzelbereiche ca. 5×5×3 cm.)

Ganze Serie Mk. 140.—.

XIII. Modell-Untersätze und Stative.

a) Untersätze für Gipsmodelle.

Um den Modellen in runder Form, z. B. den Kugeln und Ellipsoiden gute Unterlagen zu geben, die sie vor dem Herabrollen schützen, sind **Modell-Untersätze** aus **Holz,** schwarz gebeizt, in runder und ovaler Form zu beziehen und können für folgende Modelle passend geliefert werden: Serie I, Nr. 4 u. 5; Serie III, Nr. 1—4; Serie V, Nr. 2 a, b, 5 c und 7 a, b; Serie VI, Nr. 1 a, b, 2 und 3; Serie X, Nr. 3, 7, 12 a, b, c und 13; Serie XVII, Nr. 2 a, b, 5 a, b, c, 6 a, b, c; Serie XXIII, Nr. 1 a u. b, oder nach der laufenden Nummer geordnet zu Nr. 1—5, 83, 152, 153, 157—159, 193—200, 202, 274—279, 300—303.

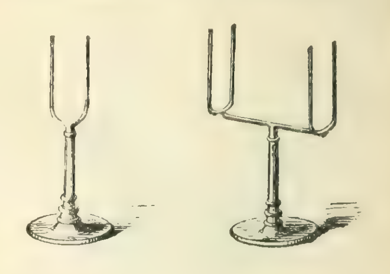
Preis per Stück je nach Grösse Mk. —.40 bis Mk. 1.20.

b) Gestelle für Fadenmodelle.

1) **Dreifuss** aus Draht zum Aufhängen des Modells Nr. 9 (XXIII, 6); die unteren Ringe des Umdreh-Hyperboloids werden dabei durch zwei Klammern in ihrer Lage festgehalten . . . . Mk. —.50.

2) **Gestelle aus Draht** als Untersatz für Nr. 27, 28, 69, 70, (XXIII, 8 a u. b, 9 a u. b) à Mk. —.30.

c) Gestelle für die Cartonmodelle der Flächen 2. Ordnung.



1) **Einfache Gabel** aus vergoldetem Messingdraht mit Holzfuss zu Nr. 6, 7, 21, 25, 37 . . . . . . à Mk. 1.50.

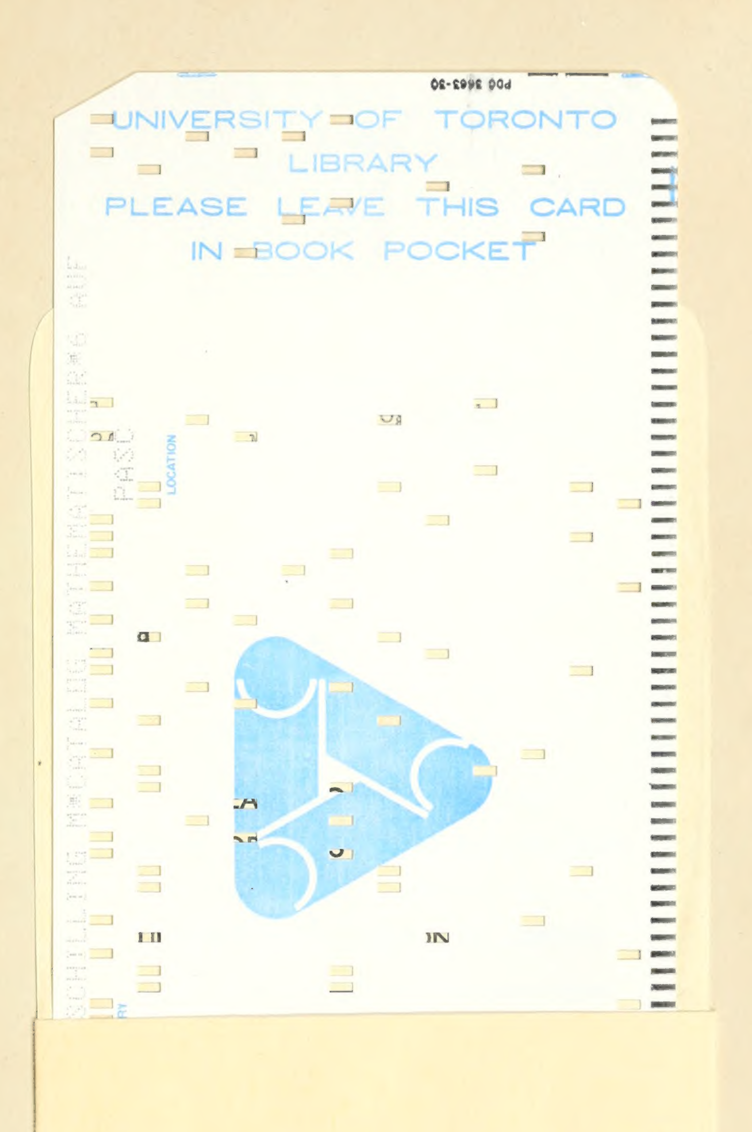
2) **Doppelgabel** zu Nr. 13 . Mk. 2.—.



3) **Holzteller** zum Aufstellen des hyperbolischen Paraboloids Nr. 25. Mk. 1.—.

Preis der Untersätze für die ganze Carton-Serie 5 Stück Nr. 1, je 1 Stück von Nr. 2 und 3 . . . . . Mk. 10.50.

Die übrigen Untersätze und Gestelle sind gleich bei den betreffenden Modellen aufgeführt.


UNIVERSITY OF TORONTO
LIBRARY
PLEASE LEAVE THIS CARD
IN BOOK POCKET
LOCATION

